Введение в теорию групп

Листок 1

Группы: основные свойства и примеры. Теорема Лагранжа и следствия.

Определение 1. Множество G с операцией $*$ называется *группой*, если выполняются следующие свойства:

1) $\forall x, y, z \in G$ $(x * y) * z = x * (y * z)$ (ассоциативность);

2) $\exists e \in G \forall x \in G$ $e * x = x * e = x$ (элемент e называется *единицей* группы G);

3) $\forall x \in G \exists y \in G$ $x * y = y * x = e$ (элемент y называется *обратным* для x и обозначается через x^{-1}).

Если в группе G дополнительно выполняется свойство *коммутативности*

$$\forall x, y \in G \ x * y = y * x,$$

то G называется *абелевой группой*.

Знак $*$ часто опускается, результат применения операции $*$ к элементам x и y записывается через xy.

Задача 1. В любой группе единица единственна.

Задача 2. В группе G для любых элементов $a, b \in G$ решение уравнения

$$ax = b \quad (xa = b)$$

существует и единственно.

Задача 3. Приведите примеры групп из 2, 3, 4 элементов. Приведите пример неабелевой группы? Существует ли неабелева группа из 4 элементов?

Определение 2. Две группы $(G, *)$ и $(H, \circ)$ называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение $\Phi : G \to H$ такое, что

$$\forall x, y \in G \ \Phi(x * y) = \Phi(x) \circ \Phi(y).$$

Задача 4. Отношение *быть изоморфными группами* является отношением эквивалентности.

Задача 5. Найдите все не изоморфные между собой группы из двух, трех, четырех элементов.

Задача 6. Какие из указанных числовых множеств с операциями являются группами?

а) $(A, +)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$;

б) $(A, \cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$;

в) $(A_0, \cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, а $A_0 = A \setminus \{0\}$;

г) числа $\{0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1\}$ с операцией сложения по модулю n;

д) числа $\{1, 2, \ldots, n-2, n-1\}$ с операцией умножения по модулю n?

Задача 7. Какие из указанных ниже совокупностей отображений множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ в себя образуют (относительно композиции) группу

а) множество все отображений;

б) множество всех инъективных (сюръективных, биективных) отображений?

Определение 3. Группа из пункта б) предыдущей задачи называется *группой подстановок порядка* n и обозначается через $\mathbf{S}_n$.

Задача 8. Сколько элементов в группе $\mathbf{S}_n$?

Задача 9. Является ли группа $\mathbf{S}_n$ абелевой?

Задача 10. Введите естественное понятие *степени* элемента $g \in G$: g^k. Докажите обычные свойства степени: $(g^n)^m = g^{nm}$, $g^n g^m = g^{n+m}$. Будет ли выполняться свойство $g^n h^n = (gh)^n$?

Определение 4. Непустое подмножество H группы G называется *подгруппой*, если

$$\forall x, y \in H \ xy \in H \wedge x^{-1} \in H.$$

Задача 11. Верно ли, что следующие два утверждения о подмножестве H группы G равносильны:

1) H — подгруппа группы G;

2) $\forall x, y \in H \ xy^{-1} \in H$?

Задача 12. Докажите, что конечное непустое подмножество любой группы, замкнутое относительно умножения, является подгруппой. Верно ли это утверждение, если это подмножество бесконечно?

Задача 13. Найдите все подгруппы группы целых чисел $(\mathbb{Z}, +)$; группы подстановок $\mathbf{S}_3$.

Определение 5. Пусть H — подгруппа группы G, $g \in G$. Тогда *правым* (*левым*) *смежным классом элемента* g *по подгруппе* H называется множество

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \quad (Hg = \{hg \mid h \in H\}).$$

Задача 14. Пусть G — группа, H — ее подгруппа, $g_1, g_2 \in G$. Тогда либо $g_1 H = g_2 H$, либо $g_1 H \cap g_2 H = \emptyset$.

Задача 15. Пусть g_1, g_2 — элементы группы G и H_1, H_2 — подгруппы в G. Докажите, что следующие свойства эквивалентны:

а) $g_1 H_1 \subseteq g_2 H_2$; б) $H_1 \subseteq H_2$ и $g_2^{-1} g_1 \in H_2$.

Задача 16. Пусть g_1, g_2 — элементы группы G, H_1, H_2 — подгруппы в G. Докажите, что непустое множество $g_1 H_1 \cap g_2 H_2$ является левым смежным классом G по подгруппе $H_1 \cap H_2$.

Задача 17 *. Пусть H — подгруппа группы G, $g_1, g_2 \in G$, $g_1 H \subseteq H g_2$. Верно ли, что тогда $g_1 H = H g_2$?

Задача 18 (теорема Лагранжа). Если G — конечная группа, H — ее подгруппа, то количество правых (левых) смежных классов G по H равно $G : H$ (это количество называется *индексом* подгруппы H в группе G). Как следствие, порядок подгруппы всегда делит порядок группы.

Определение 6. *Порядком* элемента g группы G называется минимальное натуральное число $n > 0$ такое, что $g^n = e$. Если такого числа не существуют, то говорят, что порядок элемента g бесконечен.

Задача 19. В конечной группе порядок любого элемента делит порядок группы.

Задача 20 (малая теорема Ферма). Для любого простого числа p и любого натурального a
$$a^p \equiv a \mod p.$$

Задача 21. Найдите все неизоморфные группы порядка p (p — простое число).

Задача 22. Если в группе G для любого $g \in G$ выполняется $g^2 = e$, то G — абелева группа.

Задача 23. Найдите все неизоморфные группы порядка 6.

Задача 24. Приведите пример бесконечной неабелевой группы.

Задача 25. Существует ли бесконечная группа, все элементы которой имеют конечный порядок?

Задача 26. Найдите все конечные группы, в которых существует наибольшая собственная подгруппа.