Введение в теорию групп

Листок 2

Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы. Факторгруппы, теорема о гомоморфизме.

Задача 1. Какие из следующих подмножеств группы $\mathbf{S}_n$ являются группами:

а) множество всех четных перестановок;

б) множество всех нечетных перестановок;

в) множество всех перестановок, оставляющих неподвижными элементы некоторого подмножества $S \subseteq M$;

г) множество всех перестановок, при которых образы всех элементов некоторого подмножества $S \subseteq M$ принадлежат этому подмножеству;

д) множество $\{E, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ (обозначение: $\mathbf{V}_4$);

е) множество $\{E, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}$ (обозначение: $\mathbf{D}_4$)?

Определение 1. Для данных групп G и H множество пар $\{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ с операцией

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

называется *прямым произведением* групп G и H и обозначается через $G \times H$.

В случае, если группе G и H были абелевыми, прямое произведение также обозначают через $G \oplus H$ и называют их *прямой суммой*.

Задача 2. Докажите, что прямое произведение двух групп с описанной выше операцией является группой.

Задача 3. Докажите, что если числа m и n взаимно просты, то

$$\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n.$$

Определение 2. Отображение Φ из группы G в группу H называется *гомоморфизмом из G в H*, если

$$\forall x, y \in G \ \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y).$$

Задача 4. Опишите все гомоморфизмы из группы G в группу H, если

а) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, $H = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$;

б) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$, $H = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$.

Определение 3. Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если для любого $h \in H$ и любого $g \in G$ выполняется $ghg^{-1} \in H$.

Задача 5. Найдите все нормальные подгруппы в группе $\mathbf{S}_3$.

Задача 6. Докажите, что подгруппа $\mathbf{V}_4$ нормальна в группе $\mathbf{S}_4$.

Определение 4. *Ядром* гомоморфизма $\Phi : G \to H$ называется множество

$$\{g \in G \mid \Phi(g) = e\}.$$

Задача 7. Докажите, что ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой.

Задача 8. Докажите, что любая подгруппа индекса 2 является нормальной.

Задача 9. Найдите все нормальные подгруппы в группах

а) $\mathbf{A}_4$; б) $\mathbf{S}_4$; в) $\mathbf{D}_4$; г)* $\mathbf{S}_n$, $n \geqslant 5$.

Задача 10. Пусть подгруппа H нормальна в группе G, а подгруппа K нормальна в группе H. Верно ли, что K нормальна в G?

Задача 11. Докажите, что в абелевой группе все подгруппы нормальны. Верно ли обратное утверждение (если в некоторой группе все подгруппы нормальны, то она абелева)?

Определение 5. Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда *фактор-группой* G/H группы G по подгруппе H называется множество $\{gH \mid g \in G\}$ левых смежных классов группы G по подгруппе H с операцией $g_1 H \cdot g_2 H = (g_1 g_2)H$.

Задача 12. Докажите корректность определения 5, а именно, докажите, что множество G/H с введенной операцией является группой тогда и только тогда, когда H нормальна в G.

Задача 13. Найдите фактор-группу G/H группы G по подгруппе H, если

а) $G = \mathbf{S}_n$, $H = \mathbf{A}_n$; б) $G = \mathbf{S}_4$, $H = \mathbf{V}_4$.

Задача 14. (*Теорема о гомоморфизме*). Если $\varphi : G \to H$ — сюръективный гомоморфизм групп, то

$$\operatorname{Im}\varphi \cong G/\operatorname{Ker}\varphi.$$

Задача 15. Найдите все гомоморфизм из группы $(\mathbb{Q}, +)$ в произвольную конечную группу.

Задача 16. Докажите, что при $n \geqslant 5$ все нормальные подгруппы группы $\mathbf{A}_n$ — это единичная и она сама.