Группы; группы подстановок

Листок 1

Группы: основные свойства и примеры.

Определение 1. Множество G с операцией $*$ называется *группой*, если выполняются следующие свойства:

1) $\forall x, y, z \in G\ (x * y) * z = x * (y * z)$ (ассоциативность);

2) $\exists e \in G \forall x \in G\ e * x = x * e = x$ (элемент e называется *единицей* группы G);

3) $\forall x \in G \exists y \in G\ x * y = y * x = e$ (элемент y называется *обратным* для x и обозначается через x^{-1}).

Если в группе G дополнительно выполняется свойство *коммутативности*

$$\forall x, y \in G\ x * y = y * x,$$

то G называется *абелевой группой*.

Знак $*$ часто опускается, результат применения операции $*$ к элементам x и y записывается через xy.

Задача 1. В любой группе единица единственна.

Задача 2. В группе G для любых элементов $a, b \in G$ решение уравнения

$$ax = b \quad (xa = b)$$

существует и единственно.

Задача 3. Приведите примеры групп из 2, 3, 4 элементов. Приведите пример неабелевой группы? Существует ли неабелева группа из 4 элементов?

Определение 2. Две группы $(G, *)$ и $(H, \circ)$ называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение $\Phi : G \to H$ такое, что

$$\forall x, y \in G\ \Phi(x * y) = \Phi(x) \circ \Phi(y).$$

Задача 4. Отношение *быть изоморфными группами* является отношением эквивалентности.

Задача 5. Найдите все не изоморфные между собой группы из двух, трех, четырех элементов.

Задача 6. Какие из указанных числовых множеств с операциями являются группами?

а) $(A, +)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$;

б) $(A, \cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$;

в) $(A_0, \cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, а $A_0 = A \setminus \{0\}$;

г) числа $\{0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1\}$ с операцией сложения по модулю n;

д) числа $\{1, 2, \ldots, n-2, n-1\}$ с операцией умножения по модулю n?

Задача 7. Какие из указанных ниже совокупностей отображений множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себя образуют (относительно композиции) группу

а) множество все отображений;

б) множество всех инъективных (сюръективных, биективных) отображений?

Определение 3. Группа из пункта б) предыдущей задачи называется *группой подстановок порядка* n и обозначается через $\mathbf{S}_n$.

Задача 8. Сколько элементов в группе $\mathbf{S}_n$?

Задача 9. Является ли группа $\mathbf{S}_n$ абелевой?

Задача 10. Введите естественное понятие *степени* элемента $g \in G$: g^k. Докажите обычные свойства степени: $(g^n)^m = g^{nm}$, $g^n g^m = g^{n+m}$. Будет ли выполняться свойство $g^n h^n = (gh)^n$?

Определение 4. Непустое подмножество H группы G называется *подгруппой*, если

$$\forall x, y \in H \ xy \in H \wedge x^{-1} \in H.$$

Задача 11. Верно ли, что следующие два утверждения о подмножестве H группы G равносильны:

1) H — подгруппа группы G;

2) $\forall x, y \in H \ xy^{-1} \in H$?

Задача 12. Докажите, что конечное непустое подмножество любой группы, замкнутое относительно умножения, является подгруппой. Верно ли это утверждение, если это подмножество бесконечно?

Задача 13. Найдите все подгруппы группы целых чисел $(\mathbb{Z}, +)$; группы подстановок $\mathbf{S}_3$.

Определение 5. Пусть H — подгруппа группы G, $g \in G$. Тогда *правым* (*левым*) *смежным классом элемента* g *по подгруппе* H называется множество

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \quad (Hg = \{hg \mid h \in H\}).$$

Задача 14. Пусть G — группа, H — ее подгруппа, $g_1, g_2 \in G$. Тогда либо $g_1H = g_2H$, либо $g_1H \cap g_2H = \emptyset$.

Задача 15. Пусть g_1, g_2 — элементы группы G и H_1, H_2 — подгруппы в G. Докажите, что следующие свойства эквивалентны:

а) $g_1H_1 \subseteq g_2H_2$; б) $H_1 \subseteq H_2$ и $g_2^{-1}g_1 \in H_2$.

Задача 16. Пусть g_1, g_2 — элементы группы G, H_1, H_2 — подгруппы в G. Докажите, что непустое множество $g_1H_1 \cap g_2H_2$ является левым смежным классом G по подгруппе $H_1 \cap H_2$.

Задача 17 *. Пусть H — подгруппа группы G, $g_1, g_2 \in G$, $g_1H \subseteq Hg_2$. Верно ли, что тогда $g_1H = Hg_2$?