Цепные дроби

Задача 1. Решите уравнение $[1; 2, 3, 4, x] = \frac{285}{199}$.

Задача 2. Пусть $b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{N}$, $b/c = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ — разложение в цепную дробь.
a) Покажите, что a_i — последовательные частные, получающиеся при применении алгоритма Евклида к числам b и c.

b°) Покажите, что $b/c = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, r_k/r_{k+1}]$, где r_i — последовательные остатки, получающиеся при применении алгоритма Евклида к числам $r_0 = b$ и $r_1 = c$.

Пусть $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ — цепная дробь. Напомним, что подходящие дроби p_k/q_k определяются равенствами:

$$p_{-1} = 1, \quad q_{-1} = 0, \quad p_0 = a_0, \quad q_0 = 1, \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad \text{при} \quad k \geqslant 1.$$

Задача 3. Пусть все $a_i > 0$. Докажите неравенства:

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}}; \qquad \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}.$$

Задача 4°. Сформулируйте и докажите правило сравнения цепных дробей.

Задача 5. Пусть все $a_i \in \mathbb{Z}$. Докажите, что p_k и q_k взаимно просты.

Задача 6. Докажите, что $q_k/q_{k-1} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1]$.

Задача 7°. a) Докажите, что $p_k q_{k-2} - q_k p_{k-2} = (-1)^k a_k$.
b) Пусть $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Докажите, что $|x - p_k/q_k| > |x - p_{k+1}/q_{k+1}|$ при $0 \leqslant k < n$.

Задача 8°. a) Выпишите подходящие дроби и их значения для числа $\frac{335}{91}$.
b) Найдите все решения уравнения $335a + 91b = 1$ в целых числах.

Сопоставим любому действительному числу x цепную дробь. Положим $a_0 = [x]$. Если $a_0 = x$, процесс закончим, иначе применим аналогичные действия к остатку $1/(x - a_0)$. Получим конечную или бесконечную последовательность чисел, из которых и составим цепную дробь.

Сопоставим любой бесконечной цепной дроби её значение: это такое число x, которое больше любой подходящей дроби p_n/q_n с чётным n и меньше любой подходящей дроби p_n/q_n с нечётным n (почему такое число существует?).

Покажем, что построенные соответствия между иррациональными числами и бесконечными цепными дробями взаимно обратны:

Задача 9. a) Пусть $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ — цепная дробь, построенная по числу x. Проверьте, что

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < x < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}.$$

b) Пусть цепные дроби, построенные по числам x и y, начинаются с фрагмента $[a_0; a_1, \ldots, a_k]$. Докажите, что для любого числа $z \in [x, y]$ цепная дробь начинается с того же фрагмента.
c) Пусть значение цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ есть x. Покажите, что цепная дробь, построенная по числу x, есть $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Школа 57
летний лагерь
Ершово

июнь-июль 2016

Напомним, что число называется *алгебраическим*, если оно является корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами. *Степенью* алгебраического числа называется наименьшая степень многочлена с целыми коэффициентами, корнем которого является это число.

Задача 10. Докажите теорему Лиувилля:
Если x — иррациональное алгебраическое число степени d, то существует константа $c > 0$, для которой для любого рационального приближения p/q $(q > 0)$ имеем

$$|x - p/q| > c\frac{1}{q^d}.$$

Подсказка: действуйте так же, как в случае $d = 2$, разобранном на лекции.

Задача 11. Докажите, что число

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0{,}110001000000000000000001000\ldots$$

не является алгебраическим.