Инверсия

Для успешной сдачи этого листка необходимо решить все пункты с кружочками и две трети пунктов без кружочков.

1°. а) На лекции было доказано, что при инверсии образы касающихся не в её центре прямых или окружностей касаются. Что можно сказать об образах прямых или окружностей, касающихся в центре инверсии?

б) На лекции было дано определение угла между окружностями и доказано, что инверсия сохраняет углы между прямыми. Докажите, что инверсия сохраняет углы между двумя окружностями и между окружностью и прямой.

2 (поризм Штейнера). Даны две непересекающиеся окружности α и β (для простоты можно считать, что β лежит внутри α), обладающие следующим свойством: существует набор окружностей $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ такой, что ω_i касается α и β, ω_i касается ω_{i+1}, и ω_n касается ω_1. Докажите, что для любой окружности ω', касающейся α и β, существует набор $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$, удовлетворяющий тем же условиям.

3. На лекции было проведено построение окружностей, проходящих через две данных точки и касающихся данной окружности. Для каждого количества решений этой задачи опишите все случаи расположения данных фигур, в которых оно достигается.

4 (задача Аполлония). Постройте какую-нибудь окружность, касающуюся трёх данных окружностей. Сколько всего может быть таких окружностей?

5°. На лекции обсуждалось построение образа под действием инверсии относительно данной окружности с данным центром точки, лежащей вне этой окружности, одним циркулем. Как провести построение в произвольном случае?

6 (теорема Мора-Маскерони). Следующие два построения сводят построения циркулем и линейкой к построениям только циркулем:

а) Постройте точки пересечения данной окружности ω и прямой, проходящей через данные точки A и B (обратите внимание на то, что центр окружности ω не дан).

б) Постройте точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2.

7 (задача Архимеда об арбелосе). На диаметре AB окружности ω взята точка C. На отрезках AC и CB как на диаметрах построены окружности α и β соответственно. Через точку C проведена прямая l, перпендикулярная AB. Докажите, что радиус окружности, касающейся ω, α и l, равен радиусу окружности, касающейся ω, β и l.