Введение в теорию групп, часть 2

Листок 2

Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы. Факторгруппы и теорема о гомоморфизме. Свободные группы

Определение 1. Отображение Φ из группы G в группу H называется *гомоморфизмом из G в H*, если
$$\forall x, y \in G \ \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y).$$

Задача 1. Опишите все гомоморфизмы из группы G в группу H, если

а) $G = \mathbb{Z}_6$, $H = \mathbb{Z}_9$;

б) $G = \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_3$, $H = \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_8$;

в) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, $H = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$;

г) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$, $H = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$.

Определение 2. Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если для любого $h \in H$ и любого $g \in G$ выполняется $ghg^{-1} \in H$.

Задача 2. а) Найдите все нормальные подгруппы в группе $\mathbf{S}_3$.

б) Найдите все нормальные подгруппы в группе $\mathbf{S}_4$.

в) Найдите все нормальные подгруппы в группе $\mathbf{A}_4$.

г) Найдите все нормальные погруппы в группах $\mathbf{S}_n$, $n \geqslant 5$.

Определение 3. *Ядром* гомоморфизма $\Phi : G \to H$ называется множество
$$\{g \in G \mid \Phi(g) = e\}.$$

Задача 3. Докажите, что ядро гомоморфизма является нормальной подгруппой.

Задача 4. Докажите, что любая подгруппа индекса 2 является нормальной.

Задача 5. Пусть подгруппа H нормальна в группе G, а подгруппа K нормальна в группе H. Верно ли, что K нормальна в G?

Задача 6. Докажите, что в абелевой группе все подгруппы нормальны. Верно ли обратное утверждение (если в некоторой группе все подгруппы нормальны, то она абелева)?

Определение 4. Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Тогда *фактор-группой* G/H группы G по подгруппе H называется множество $\{gH \mid g \in G\}$ левых смежных классов группы G по подгруппе H с операцией $g_1H \cdot g_2H = (g_1g_2)H$.

Задача 7. Докажите корректность определения 4, а именно, докажите, что введенная операция на множестве G/H определена корректно тогда и только тогда, когда H нормальна в G. Докажите, что факторгруппа является группой.

Задача 8 (Теорема о гомоморфизме). Если $\varphi : G \to H$ — сюръективный гомоморфизм групп, то
$$H \cong G/\operatorname{Ker}\varphi.$$

Задача 9. Найдите фактор-группу G/H группы G по подгруппе H, если

а) $G = \mathbf{S}_n$, $H = \mathbf{A}_n$;

б) $G = \mathbf{S}_4$, $H = \mathbf{V}_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$;

в) $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$.

Задача 10. Найдите все гомоморфизм из группы $(\mathbb{Q}, +)$ в произвольную конечную группу.

Задача 11. Докажите, что при $n \geqslant 5$ все нормальные подгруппы группы $\mathbf{A}_n$ — это единичная и она сама.

Определение 5. Группа $F = F(X)$ называется *свободной на множеством* X, если она состоит из "слов"

$$x_{i_1}^{\alpha_i} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_n}^{\alpha_n}, \quad x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in X,\ \alpha_1, \dots, \alpha_n = \pm 1,$$

с операцией конкатенации и единицей, состоящей из пустого слова ε. Группа называется *свободной*, если она свободна над некоторым множеством X.

Задача 12. Докажите, что свободная группа действительно является группой.

Задача 13. Докажите, что для любой группы G, порожденной множеством Y, для любого отображения $\varphi : X \to Y$ существует и единственен гомоморфизм $F(X) \to G$, являющийся продолжением отображения φ.

Задача 14. Докажите, что любая группа является фактор-группой некоторой свободной группы по ее подгруппе.

Определение 6. Пусть — абелева группа. Будем говорить, что система элементов

$$\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A$$

порождает A, если

$$\forall a \in A\ \exists n_1, n_2 \dots, n_k \in \mathbb{Z} : a = a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots + a_k n_k.$$

Множество $a_1, a_2, \dots, a_k$ называется системой *порождающих* (*образующих*). Если оно конечно, то группа G называется *конечно порожденной*. Будем писать $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$.

Определение 7. Назовем систему элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A$ *независимой*, если из условия $a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots + a_k n_k = 0$ следует, что $\forall i\ n_i = 0$.

Определение 8. Если система элементов $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq A$ является независимой и порождает абелеву группу A, то она называется *базисом*.

Задача 15. Пусть $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, а элементы $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ образуют независимую систему. Докажите, что $m \geqslant k$.

Доказательство. Предположим от противного, что $m < k$. Так как $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, то элементы b_i выражаются через $a_1, a_2, \dots, a_m$. Таким образом,

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_{11} a_1 + \cdots + \alpha_{1k} a_k, \\ \dots \\ b_m = \alpha_{m1} a_1 + \cdots + \alpha_{mk} a_k \end{cases}$$

для некоторых целых α_{ij}.

Рассмотрим систему однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} 0 = \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{m1}x_m, \\ \dots \\ 0 = \alpha_{1k}x_1 + \dots \alpha_{mk}x_m. \end{cases}$$

Так как $m < k$, то уравнений меньше, чем неизвестных, поэтому существует ненулевое (рациональное) решение $(\beta_1^0, \dots, \beta_m^0)$. Так как решения однородной системы линейных уравнений образуют линейное пространство, то из рационального решения (умножением) мы можем получить целочисленное решение $(\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} a_j = \sum_{j=1}^{k} a_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_i = 0.$$

Таким образом, мы показали, что элементы $b_1, \dots, b_m$ зависимы, и пришли к противоречию. □

Определение 9. Группа A называется *группой без кручения*, если каждый ее неединичный элемент имеет бесконечный порядок.

Определение 10. Для соотношения

$$a_1n_1 + a_2n_2 + \dots + a_kn_k = 0, \quad n_i \neq 0$$

назовем *высотой* этого соотношения число $\min\{|n_i| \mid i = 1, \dots, k\}$. Соотношение такого вида на элементы $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ будем называть *минимальным*, если его высота минимальна среди всех высот соотношений на $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Задача 16. Пусть A — абелева группа без кручения. Докажите, что если $a_1n_1 + a_2n_2 + \dots + a_kn_k = 0$ — минимальное соотношение, то НОД$(n_1, n_2, \dots, n_k) = 1$.

Доказательство. Предположим, что это не так, и НОД$(n_1, n_2, \dots, n_k) = d$, $d > 1$. Тогда $d(a_1m_1 + a_2m_2 + \dots + a_km_k) = 0$, где $m_i = n_i/d$. При этом из минимальности следует, что $a_1m_1 + a_2m_2 + \dots + a_km_k \neq 0$. Это противоречит тому, что в группе A нет кручения. □

Задача 17. Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ — система образующих группы A, $a_1n_1 + a_2n_2 + \dots + a_kn_k = 0$ — соотношение высоты 1. Без ограничения общности можно считать, что $n_k = 1$. Докажите тогда, что $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\rangle$.

Задача 18. Если высота минимального соотношения системы образующих абелевой группы A без кручения $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ равна $h > 1$, то существует другая система образующих $\{a_1', a_2', \dots, a_k'\}$, высота минимального соотношения которой строго меньше h.

Доказательство. Пусть минимальное соотношение для образующих $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ имеет вид $a_1n_1 + a_2n_2 + \dots + a_kn_k = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $n_1 = h$. По задаче 16 существует номер $i > 1$ такой, что n_i не делится на h. Опять же без ограничения общности можно считать, что $i = 2$. Пусть тогда $n_2 = kh + r$, где $r < h$. Таким образом, минимальное соотношение перепишется как $0 = a_1 \cdot h + a_2(kh + r) + \dots + a_kn_k = (a_1 + ka_2)h + a_2 \cdot r + \dots$ Таким образом, мы получили соотношение с меньшей высотой. □

Задача 19. Используя предыдущие задачи, докажите, что

а) всякая конечно порожденная абелева группа без кручения имеет базис;

б) все базисы данной группы равномощны (имеют одинаковое количество элементов).

Доказательство. а) Докажем утверждение по индукции по количеству порождающих. База очевидна. Рассмотрим некоторую систему порождающих конечно порожденной абелевой группы без кручения: $A = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. Если соотношений на $a_1, \ldots, a_k$ нет, то группа A свободна. Пусть соотношение на $a_1, \ldots, a_k$ существует. Если оно имеет высоту 1, то по задаче 17 группа A порождается меньшим количеством образующих, и мы можем применить индукцию. Если соотношение имеет высоту $h > 1$, то последовательными заменами образующих мы можем перейти к соотношению высоты 1 и далее применить индукцию.

б) Равномощность всех базисов свободной конечно порожденной абелевой группы очевидно следует из задачи 15, так как каждый базис является системой образующих и при этом независимой системой. □

Задача 20. Верно ли, что всякая счетно порожденная абелева группа без кручения имеет базис?

Задача 21. а) Какие из групп $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^*_+, \cdot)$ изоморфны?

б) Найдите все пары групп G_1, G_2 из этого списка, для которых в G_2 существует подгруппа, изоморфная G_1.