Введение в теорию групп, часть 2

Листок 3

Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп

Определение 1. Конечно порожденная абелева группа A называется *свободной группой ранга n*, если
$$A \cong \mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$$

Задача 1. Докажите, что всякая конечно порожденная абелева группа без кручения является свободной.

Доказательство. Благодаря предыдущим леммам, нам достаточно доказать, что если группа A имеет конечный базис $\{a_1, \ldots, a_k\}$, то она изоморфна группе $\mathbb{Z}^k$.

Действительно, рассмотрим отображение $A \to \mathbb{Z}^k$, при котором $n_1a_1 + \cdots + n_ka_k$ переходит в элемент $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$. Такое отображение определено и корректно благодаря отсутствию соотношений на элементы $a_1, \ldots, a_k$. Очевидно, что оно сохраняет операцию и биективно. $\square$

Задача 2. Пусть A — конечно порожденная свободная абелева группа ранга n, B — подгруппа группы A. Докажите, что существует такой базис $\{a_1, v_2, \ldots, v_n\}$ группы A и элемент $b_1 \in B$, что $A = \langle a_1\rangle \oplus A_1$, $B = \langle b_1\rangle \oplus B_1$, $B_1 \subseteq A_1$ и $b_1 = m_1a_1$, $m_1 \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Выберем базис $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ группы A и элемент $b_1 \in B$ такие, что $b_1 = m_1v_1 + s_2v_2 + \ldots + s_nv_n \in B$, где m_1 — положительный и для любого другого базиса и элемента из B первый коэффициент не может быть меньше m_1.

Если $s_2, \ldots, s_n$ не делятся на m_1, то базис и искомое b_1 можно выбрать так, чтобы соответствующее m_1 было меньше. Значит, все $s_2, \ldots, s_n$ делятся на m_1. Таким образом, $b_1 = m_1(v_1 + s'_2v_2 + \cdots + s'_nv_n)$, откуда следует, что можно вместо v_1 выбрать в качестве первого элемента базиса элемент $a_1 = v_1 + s'_2v_2 + \cdots + s'_nv_n$.

Таким образом, найдены искомые a_1, b_1, m_1. В качестве A_1 возьмем $\langle v_2, \ldots, v_n\rangle$, в качестве B_1 — проекцию B на A_1. Корректность теперь следует из минимальности элемента m_1. $\square$

Задача 3. Пусть B — ненулевая подгруппа свободной абелевой группы A конечного ранга n. Докажите, что

а) B конечно порождена;

б) B свободна;

в) можно выбрать базисы $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ в A и B соответственно, так, что $b_i = m_ia_i$, где m_i — неотрицательные целые числа, и $m_{i-1}|m_i$ для всех $i \leqslant k$, для $j > k$ $m_j = 0$.

Доказательство. Все три пункта задачи очевидно доказываются по предыдущей задаче по индукции. $\square$

Задача 4. Пусть B_1 — подгруппа группы A_1, B_2 — подгруппа группы A_2. Докажите, что тогда
$$(A_1 \oplus A_2)/(B_1 \oplus B_2) \cong A_1/B_1 \oplus A_2/B_2.$$

Задача 5. Докажите, что любой гомоморфный образ $\varphi(A)$ свободной абелевой группы A ранга n изоморфен группе

$$\mathbb{Z}^{n-k} \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Доказательство. По теореме о гомоморфизме образ $\varphi(A)$ изоморфен фактору группы A по ядру гомоморфизма φ. Пусть это ядро равно $B \subseteq A$. Рассмотрим базисы для A и B из предыдущей задачи. Тогда

$$\varphi(A) \cong A/B = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle / \langle m_1 a_1, \ldots, m_n a_n \rangle = \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}.$$

Если $m_i = 1$, то $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z} \cong \{e\}$, если $m_i > 1$, то $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{m_i}$, если $m_i = 0$, то $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. □

Задача 6. Докажите, что любая конечно порожденная абелева группа A является гомоморфным образом некоторой конечно порожденной свободной абелевой группы.

Задача 7. Докажите, что всякая конечно порожденная абелева группа является прямой суммой свободной абелевой группы конечного ранга и конечной абелевой группы. Всякая конечная абелева группа является прямой суммой циклических групп порядков $m_1, \ldots, m_k$, причем $m_{i-1} | m_i$.

Доказательство. Следует из предыдущих двух задач. □

Определение 2. Циклические группы вида $\mathbb{Z}_{p^k}$, где p — простое, называются *примарными*.

Задача 8. Докажите, что любая конечно порожденная абелева группа раскладывается в сумму конечного числа бесконечных циклических и примарных циклических групп и это разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых.

Задача 9. Предположим, что свободная конечно порожденная группа A задана базисом $e_1, \ldots, e_n$, а ее подгруппа B задана своим базисом $f_1, \ldots, f_m$, где для каждого $i = 1, \ldots, m$ $f_i = a_{i,1}e_1 + \cdots + a_{i,n}e_n$, все $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$. Докажите, что любое элементарное целочисленное преобразование строк или столбцов матрицы $(a_{i,j})$ (перестановка, умножение на -1, прибавление к одной строке или столбцу другой (другого), умноженной на целое число) приведет к матрице $(a'_{i,j})$, выражающей некоторый базис $\{f'_1, \ldots, f_m\}'$ подгруппы B через базис $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ группы A.

Задача 10. Докажите, что элементарными преобразованиями, описанными в предыдущей задаче, можно привести целочисленную матрицу $(a_{i,j})$ к строго ступенчатому виду $(a'_{i,j})$, где $a_{1,1}|a_{2,2}$, …, $a_{k-1,k-1}|a_{k,k}$, остальные элементы матрицы равны нулю.

Комментарий. Заметьте, что это утверждение эквивалентно утверждению задачи 3 о выборе согласованных базисов для свободной конечно порожденной абелевой группы и ее подгруппы. Почему нельзя было доказать теорему о строении конечно порожденных абелевых групп, пользуясь только последними двумя задачами?

Задача 11. Найдите все абелевы группы порядка

а) 100; б) 128; в) 1000.

Задача 12. Разложите в прямую сумму циклических групп факторгруппу A/B, где A — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, B — ее подгруппа, порожденная y_1, y_2, y_3:

$$\text{а)} \quad \begin{cases} y_1 &= 7x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ y_2 &= 21x_1 + 8x_2 + 9x_3, \\ y_3 &= 5x_1 - 4x_2 + 3x_3; \end{cases} \qquad \text{б)} \quad \begin{cases} y_1 &= 5x_1 + 5x_2 + 3x_3, \\ y_2 &= 5x_1 + 6x_2 + 5x_3, \\ y_3 &= 8x_1 + 7x_2 + 9x_3. \end{cases}$$

Задача 13. Приведите пример абелевой группы, не раскладывающейся в прямую сумму циклических групп.

Определение 3. Абелева группа A называется *делимой*, если для любого $a \in A$ и любого натурального n существует $b \in A$ такое, что $nb = a$.

Задача 14. Докажите, что для любого простого числа p группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ всех комплексных корней из единицы степеней p^n, $n \in \mathbb{N}$, является делимой.

Задача 15. Докажите, что любая счетная делимая абелева группа является прямой суммой некоторого (может быть, бесконечного) набора экземпляров группы $\mathbb{Q}$ и групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для разных простых чисел p.

Задача 16. Докажите, что делимая группа выделяется прямым слагаемым в любой группе, в которой она содержится в качестве подгруппы.

Задача 17. Найдите все гомоморфизмы из группы $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ в произвольную абелеву группу.