Введение в теорию групп
Лекция 1

Задача 1 (малая теорема Ферма). Для любого простого числа p и любого натурального a

$$(a^p - a) \vdots p.$$

Задача 2. К кубику Рубика применили последовательность поворотов. Доказать, что, применяя ее несколько раз, можно привести кубик в начальное состояние.

Определение 1. Множество G с операцией $*$ называется *группой*, если выполняются следующие свойства:

1) $\forall x, y, z \in G\ (x * y) * z = x * (y * z)$ (ассоциативность);
2) $\exists e \in G\ \forall x \in G\ e * x = x * e = x$ (элемент e называется *единицей* группы G);
3) $\forall x \in G\ \exists y \in G\ x * y = y * x = e$ (элемент y называется *обратным* для x и обозначается через x^{-1}).

Знак $*$ часто опускается, результат применения операции $*$ к элементам x и y записывается через xy.

Задача 3. Являются ли множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ группой по сложению? А по умножению?

Задача 4. Являются ли указанные числовые множества с операциями группами?

а) числа $\{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$ с операцией сложения по модулю n;
б) числа $\{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$ с операцией умножения по модулю n;
в) числа $\{1, 2, \dots, n-2, n-1\}$ с операцией умножения по модулю n?

Задача 5. Какие из указанных ниже совокупностей отображений множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ в себя образуют (относительно композиции) группу

а) множество всех отображений;
б) множество всех взаимно-однозначных отображений?

Определение 2. Группа из пункта б) предыдущей задачи называется *группой подстановок порядка* n и обозначается через $\mathbf{S}_n$.

Если в группе G дополнительно выполняется свойство *коммутативности*

$$\forall x, y \in G\ x * y = y * x,$$

то G называется *абелевой группой*.

Задача 6. Является ли группа $\mathbf{S}_n$ абелевой?

Задача 7. В любой группе единица единственна.

Задача 8. В группе G для любых элементов $a, b \in G$ решение уравнения

$$ax = b \quad (xa = b)$$

существует и единственно.

Определение 3. Две группы $(G, *)$ и $(H, \circ)$ называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение $\Phi : G \to H$ такое, что

$$\forall x, y \in G\ \Phi(x * y) = \Phi(x) \circ \Phi(y).$$

Задача 9. Найдите все различные (не изоморфные) между собой группы из четырех элементов и придумайте их геометрическую реализацию.