Неравенства-I.

Задача 1. $a)$ Аккуратно докажите перестановочное неравенство для 3 слагаемых.

$b)$ Докажите общее перестановочное неравенство: если $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$, $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$, то для любой перестановки $i_1, \ldots, i_n$ индексов $1, \ldots, n$ верно, что

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqslant x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + \cdots + x_ny_{i_n}.$$

Задача 2. Даны положительные числа a, b, c, d. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant a(b + c + d).$$

При каких значениях a, b, c, d достигается равенство?

Задача 3. На доске выписаны подряд 9 цифр $1, 2, \ldots, 9$. Рассмотрим все тройки цифр, идущих подряд, и найдём сумму соответствующих семи трёхзначных чисел. Каково наибольшее значение этой суммы?

Задача 4. Даны два положительных числа a, b. Докажите, что $(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}(a^n + b^n)$

Задача 5 (ММО, 1963 г.)**.** Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Задача 6. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — различные натуральные числа. Докажите, что

$$c_1 + \frac{c_2}{2} + \cdots + \frac{c_n}{n} \geqslant n.$$

Задача 7. В треугольнике ABC длины сторон равны a, b, c, а длины соответствующих высот h_a, h_b и h_c. Докажите следующую верхнюю оценку на площадь треугольника:

$$S \leqslant \frac{(a+b+c)(h_a+h_b+h_c)}{6}.$$

Для сдачи листка необходимо решить 5 задачи (пункты считаются отдельными задачами).