Конечная геометрия

Для успешной сдачи этого листка необходимо решить четыре задачи. Условия некоторых задач станут понятны завтра.

1. Нарисуйте хотя бы по одной прямой каждого направления в аффинной плоскости $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_4)$. *Для того, чтобы построить поле из четырёх элементов, явно придумайте таблицу умножения такую, чтобы выполнялись все нужные аксиомы.*

2. Рассмотрим правильный (n^2+n+1)-угольник. Назовём подмножество из $n+1$ вершины *вполне неправильным подмногоугольником*, если в нём все длины сторон и диагоналей разные. Постройте вполне неправильный подмногоугольник в 21-угольнике. Докажите, что, если определить точки как вершины исходного многоугольника, а прямые (подмножества) — как вполне неправильный подмногоугольник и все его повороты, то получится проективная плоскость.

3. Рассмотрим четырёхсторонник, то есть p-полную конфигурацию $(4_3 6_2)$. Сделаем её l-полной, добавив три недостающие прямые. При этом она перестанет быть p-полной. Добавим все недостающие точки и будем продолжать действовать так же (то есть почти как на лекции при построении недезарговой плоскости). Докажите, что получившееся множество точек всюду плотно. Верно ли, что на разных шагах будут получаться разные точки?

4. Докажите, что p-полная (или l-полная) симметричная конфигурация является проективной плоскостью или треугольником.

5. *Коллинеацией* проективной плоскости называется биекция, при которой прямые переходят в прямые. Легко видеть, что коллинеации образуют группу. Найдите количество коллинеаций плоскости Фано (то есть $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$). Попробуйте понять, как устроена группа коллинеаций.

6. *Из определения проективной плоскости над полем следует, что для её точек имеют смысл только такие многочлены, в которых все мономы имеют одинаковую степень d — чтобы при умножении всех координат на одно и то же число λ значение умножалось на λ^d. Такие многочлены называются однородными. Примером однородного уравнения является прямая:*

$$ax + by + cz = 0, \ a, b, c \in \Bbbk,$$

а не однородного: $x^3 + yz + 4 = 0$. Придумайте ненулевое уравнение, которому будут удовлетворять все точки плоскости Фано (то есть однородное, на переменные x, y, z, с коэффициентами из $\mathbb{F}_2$: каждый моном либо есть, либо нет).

7. В каких конечных проективных плоскостях над полем содержится плоскость Фано? *Содержится в том смысле, что существуют семь точек и семь прямых с нужными инцидентностями:*

•	•	•				
•			•	•		
•					•	•
	•		•		•	
	•			•		•
		•	•			•
		•		•	•	

8. Найдите количество точек и прямых на k-м шаге построения недезарговой плоскости. Первый шаг — это конфигурация $(4_3 6_2)$. На чётных шагах добавляем все недостающие точки, на нечётных — прямые.