Задачный конспект курса “Рациональные приближения действительных чисел” В. А. Клепцына (+продолжение), листок 1

1 Приближаемость и не-приближаемость

Задача 1 (Теорема Дирихле)**.** Пусть выбраны $x \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$.

a. Докажите, что из $n_0 + 1$ точек $0, x, 2x, \ldots, n_0 x$ окружности $\mathbb{R} \mod 1$ длины 1 какие-то две находятся на расстоянии, меньшем $\frac{1}{n_0}$.

b. Выведите отсюда, что для некоторых $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \leq n_0$ выполнено $|qx - p| < \frac{1}{n_0}$.

c. Выведите отсюда, что для некоторых $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \leq n_0$ выполнено

$$|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{n_0 q} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Задача 2. a. Докажите, что для любых $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ выполнено

$$|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{10q^2}.$$

b. Пусть иррациональное число x — корень многочлена $P(x)$ степени k с целыми коэффициентами. Докажите, что найдётся константа $c > 0$, такая, что

$$\forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \quad |x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^k}.$$

Определение 1. Иррациональное число $x \in \mathbb{R}$ называется *диофантовым*, если найдутся такие $c > 0$, $k \in \mathbb{N}$, что

$$\forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \quad |x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^k}.$$

В противном случае, оно называется *лиувиллевым.*

Задача 3. Все иррациональные алгебраические числа — диофантовы.

Задача 4. Число $a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ лиувиллево, и потому трансцендентно.

2 Ряды Фарея

Выберем какое-нибудь натуральное число n, и выпишем все несократимые дроби из отрезка $[0, 1]$, знаменатель которых не превосходит n. При $n = 3$, мы получаем

$$0 = \frac{0}{1} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{1}{1} = 1.$$

Определение 2. *n-ый ряд Фарея* это последовательность $\{\frac{a_{i;n}}{b_{i;n}}\}$ всех несократимых дробей из отрезка $[0, 1]$, знаменатель которых не превосходит n, упорядоченных по возрастанию.

Задача 5. Выпишите ряды Фарея для всех $n \leq 5$.

Задача 6. Отметьте внутри треугольника с вершинами $(0,0)$, $(5,0)$, $(5,5)$ все целочисленные точки с взаимно простыми координатами. Как результат связан с предыдущей задачей?

Задача 7. a. Пусть $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ — две последовательные дроби в n-м ряду Фарея. Чему равна площадь треугольника с вершинами $(0,0)$, (a,b), (a',b')? (**Подсказка:** примените формулу Пика.)

b. Площадь треугольника с вершинами $(0,0)$, (a,b) и (c,d) равна модулю величины

$$\det \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc.$$

c. Пусть $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ — две последовательные дроби в n-м ряду Фарея. Тогда

$$\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bb'}.$$

Определение 3. *Медиантом* двух несократимых дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ называется дробь $\frac{a+a'}{b+b'}$.

Задача 8. Если $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ — две несократимые дроби, $a, a', b, b' \geq 0$, то

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}.$$

Указание. Если хотите обойтись без выкладок — подумайте, какую фигуру образуют точки $(0,0)$, (a,b), $(a+a', b+b')$, (a',b')?

Задача 9. Если при переходе от $(n-1)$-го ряда Фарея к n-му между дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ добавляется новая, то эта новая — их медиант.

Задача 10. Любая дробь в ряде Фарея — медиант своих соседей.

Указание. Осторожно! Эта задача не совпадает с предыдущей (хотя, конечно, её использует).

Задача 11. Пусть иррациональное число $x \in [0,1]$ заключено в интервале $(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'})$ между двумя соседними дробями в n-м ряде Фарея. Что можно сказать о точности приближения x концами этого отрезка?