Школа 57
летний лагерь
Ершово

июнь 2014

Симметрические многочлены – 2

Задача 1. Пусть λ и μ – диаграммы Юнга из одинакового числа клеток и вектор $D(\lambda)$ мажорирует вектор $D(\mu)$. Докажите, что μ получается из λ операциями сбрасывания кирпичей.

Задача 2. Пусть $\Phi_\lambda(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \Phi_\mu(x_1, \ldots, x_n)$ при всех $x_i \geqslant 0$. Верно ли, что $D(\lambda)$ мажорирует $D(\mu)$?

Задача 3. Выпишите все неравенства Мюрхеда между симметрическими многочленами от трёх переменных для диаграмм Юнга из четырёх клеток.

Задача 4. Докажите, что при всех неотрицательных x, y, z верно неравенство $x^5 + y^5 + z^5 \geqslant x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2$.

Задача 5. Найдите максимум величины

$$\frac{x^3y^2z^2 + x^2y^3z^2 + x^2y^2z^3}{x^4y^2z + x^4yz^2 + x^2y^4z + xy^4z^2 + x^2yz^4 + xy^2z^4}$$

при положительных x, y, z.

Скажем, что вектор $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ *мажорирует* вектор $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{R}^n$, если для всех $k = 1 \ldots n$ верны неравенства $d_1 + d_2 + \ldots + d_k \geqslant e_1 + e_2 + \ldots + e_k$, причём при $k = n$ имеем равенство.

Задача 6*. a) Определите сбрасывание кирпичей для диаграмм Юнга с нецелыми длинами строк. Подсказка: кирпичи могут иметь произвольную ширину.

b) Проверьте, что диаграмма μ получается из диаграммы λ конечным числом таких операций $\Longleftrightarrow$ $D(\lambda)$ мажорирует $D(\mu)$.

Задача 7*. Сфорумулируйте и докажите неравенство Мюрхеда для произвольных показателей $(d_1, \ldots, d_n)$ и $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{R}^n$.

Подсказка: полностью аналогично случаю натуральных показателей.

Задача 8. Докажите с помощью неравенства Мюрхеда неравенство Коши о средних:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

при любых $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$.