Многочлены с целыми коэффициентами и делимость.

Все многочлены в этом листочке — с целыми коэффициентами.

Задача 1. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестного подставить 2 или 3, то получаются числа, кратные 6. Докажите, что если вместо неизвестного в него подставить 5, то также получится число, кратное 6.

Задача 2. Известно, что $P(1) = 2011$, $P(2011) = 1$ и $P(m) = m$ для некого целого m. Чему может быть равно m?

Задача 3. Дан многочлен с целыми коэффициентами. В трёх целых точках он принимает значение 2. Доказать, что ни в какой целой точке он не принимает значение 3.

Задача 4. Если многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1, то он не имеет ни одного целого корня. Докажите это.

Задача 5. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19) = P(94) = 1994$.

Задача 6. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k)$, $P(k+1), \ldots, P(k+1996)$ будут составными, если
a) $n = 1$;
b) n — произвольное натуральное число.

Задача 7. Для любого целого a оказалось, что $P(a) \vdots a^2$. Докажите, что $P(x) = x^2Q(x)$, где Q — многочлен.

Задача 8. Докажите, что для любого многочлена степени хотя бы 2 есть арифметическая прогрессия a_n, такая, что для любого ее члена a_i уравнение $P(x) = a_i$ не имеет целых корней.