Вокруг леммы о трилистнике

Задача 1. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что $AD = BD$.

Задача 2. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. На этой биссекрисе отметили два центра вневписанных окружностей — I_A и I_B. Докажите, что D — середина AB.

Задача 3. Пусть I_A и I_B — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и CA треугольника ABC соответственно, а P — середина дуги AB окружности Σ , описанной около этого треугольника. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников I_ACP и I_BCP , совпадает с центром окружности Σ .

Задача 4. На описанной окружности треугольника ABC отметили середины дуг AB и AC — M и N. Отрезок MN пересекает стороны AB и BC в точках P и Q. Докажите, что $APIQ$ — ромб. (I — центр вписанной окружности треугольника ABC).

Задача 5. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC .

Задача 6. Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты соответственно точки C_1 и A_1 так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 проходят через центр вписанной окружности треугольника ABC.

Задача 7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к Ω, проведённые в точках A' и C', пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω.

Задача 8. Пусть AH — высота остроугольного треугольника ABC, а точки K и L — проекции H на стороны AB и AC. Описанная окружность треугольника ABC пересекает прямую KL в точках P и Q, а прямую AH — в точках A и T. Докажите, что точка H является центром окружности, вписанной в треугольник PQT.