▷ *Определителем* квадратной матрицы (a_{ij}) размера $n \times n$ называется число

$$\det(a_{ij}) := \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам n элементов. Например,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Определитель линеен по каждой из строк. При перестановке двух строк матрицы определитель меняет знак. В частности, определитель матрицы с одинаковыми строками равен нулю.

Задача 1.1. а) Если какие-то две строки матрицы пропорциональны, ее определитель равен нулю; б) если к одной строке матрицы прибавить другую, умноженную на какое-то число, определитель не изменится.

▷ Пусть Γ — ориентированный граф без ориентированных циклов. Если S и T — упорядоченные наборы из n вершин, через $P_{nc}(S \to T)$ будем обозначать количество наборов из n путей, ведущих из $s_1, \dots, s_n$ в $t_1 \dots, t_n$ соответственно, через $P_{nc}(S \to T)$ — количество тех из них, которые не пересекаются друг с другом. Лемма LGV состоит в том, что

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) P_{nc}(S \to \sigma(T)) = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) P(S \to \sigma(T)).$$

Так как $P(S \to T) = P(s_1 \to t_1) \cdot \ldots \cdot P(s_n \to t_n)$, правая часть равна определителю *матрицы путей,* $\det\bigl(P(s_i \to t_j)\bigr)$.

Задача 1.2. Найдите число трехмерных диаграмм Юнга внутри параллелепипеда $a \times b \times 2$ (ответ разложите на множители).

Задача 1.3. Найдите (представьте в виде определителя) число диаграмм Юнга лежащих внутри диаграммы Юнга $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. (Указание. Установите соответствие между поддиаграммами и непересекающимися путями от точек $(0,0), (0,1), \dots, (0, k-1)$ до точек $(l_1, 1), (l_2, 2), \dots, (l_k, k)$, где $l_i = \lambda_i + i - 1$. Эта задача объясняет, в частности, почему в примере на занятии получалось число Каталана.)

Задача 1.4. *Определителем Вандермонда* называется многочлен

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

а) Вычислите определитель Вандермонда для $n = 2, 3$ (ответ разложите на множители).
б) Вычислите определитель Вандермонда для общего n. (Указание. Когда этот многочлен обращается в ноль?)
в) Как изменится ответ, если вместо x_j^{i-1} в матрице поставить $P_{i-1}(x_j)$, где P_{i-1} — какой-то многочлен степени $i - 1$?