Школа 57
летний лагерь
Ершово

июнь 2014

Кривая Пеано и лестница Кантора

Задача 1. Пусть $p_n\colon [0,1] \to [0,1]^2$ – змеящиеся непрерывные функции, определённые на лекции. Докажите, что:

a) при всех $t \in [0,1]$ существует $p(t) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(t)$;

b) функция $p(t)$ непрерывна;

c) функция $p(t)\colon [0,1] \to [0,1]^2$ сюръективна.

d^*) Дифференцируема ли $p(t)$?

Задача 2. Пусть $A \in [0,1]^2$ – точка.

a) Сколько элементов может содержать множество $p^{-1}(A)$? Опишите все случаи.

b) Покажите, что $\mu(\{A \in [0,1]^2 \mid p^{-1}(A) \text{ — точка}\}) = 1$.

Задача 3. Покажите, что множество $p(X)$ измеримо и имеет меру $\mu(X)$, где $X \subset [0,1]$ –

a) отрезок,

b) произвольное измеримое множество.

Определим функцию Кантора $K\colon [0,1] \to [0,1]$. На интервале $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ она равна $\frac{1}{2}$. На интервале $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ она равна $\frac{1}{4}$, на $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ она равна $\frac{3}{4}$, и так далее: на каждом интервале, выкидываемом при построении множества Кантора, функция Кантора постоянна и равна среднему арифметическому между значениями на соседних уже выкинутых интервалах. На оставшемся множества Кантора $K(x)$ доопределяется по непрерывности.

Задача 4. Докажите, что $K(x)$ корректно определена, непрерывна, монотонна и сюръективна.

Задача 5. Докажите, что функция $\frac{1}{2}(K(x) + x)$ непрерывна, строго монотонна и осуществляет биекцию $[0,1] \to [0,1]$.

Задача 6. Вычислите $K(a/b)$ для $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 5$.

Задача 7. Вычислите $K^{-1}(a/b)$ для $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 5$.