Двойные отношения

Задача 1. Дана окружность и точки A и B на ней. Касательные в этих точках пересекаются в точке P. Из этой точки проведена произвольная секущая, пересекающая окружность в точках C и D, AB пересекает CD в точке O. Докажите, что $(POCD) = -1$.

Задача 2. Точки A, B, C и D лежат на окружности, SA и SD — касательные к этой окружности, P и Q — точки пересечения прямых AB и CD, AC и BD соответственно. Докажите, что точки P, Q и S лежат на одной прямой.

Задача 3. На сторонах угла взяты точки A, B. Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1, другая — в точках A_2, B_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q. Докажите, что M — середина PQ.

Задача 4. Даны четыре точки A, B, C, D. Пусть P, Q, R — точки пересечения прямых AB и CD, AD и BC, AC и BD соответственно; K и L — точки пересечения прямой QR с прямыми AB и CD соответственно. Докажите, что $(QRKL) = -1$.

Задача 5. Пусть O — середина хорды AB окружности S, MN и PQ — произвольные хорды, проходящие через O, причем точки P и N лежат по одну сторону от AB, E и F — точки пересечения хорды AB с хордами MP и NQ соответственно. Докажите, что O — середина отрезка EF.

Задача 6. Точки A, B, C лежат на прямой l, а точки A_1, B_1, C_1 — на прямой l_1. Докажите, что точки пересечения прямых AB_1 и BA_1, BC_1 и CB_1, CA_1 и AC_1 лежат на одной прямой (теорема Паппа).

Задача 7. Докажите, что геометрическое место точек пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$, у которых стороны AB и CD лежат на двух данных прямых l_1 и l_2, а стороны BC и AD пересекаются в данной точке P, является прямой, проходящей через точку Q пересечения прямых l_1 и l_2.

Задача 8. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, а E, F — точки пересечения продолжений сторон AB и CD, BC и AD соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках K и L, а прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках M и N. Докажите, что точка X пересечения прямых KN и LM лежит на прямой EF.