Производная многочлена — 2

Задачи из этого листка существенно сложнее задач из предыдущего. Если вы не решили какую-то из них, но у вас есть идеи, или вы хотите получить подсказку, обязательно подойдите ко мне.

Задача 1. При каких n многочлен $(x+1)^n + x^n + 1$ делится на: a) x^2+x+1; b) $(x^2+x+1)^2$; c) $(x^2+x+1)^3$?

Задача 2. Пусть $f, g, h = f+g$ — попарно взаимно простые многочлены степени n каждый. Оказалось, что у каждого из них есть ровно n корней. Докажите, что среди $3n$ корней многочлена fgh есть хотя бы $n+1$ различный.

Задача 3. Пусть даны $n > 1$ квадратных трёхчленов

$$x^2 - a_1x + b_1, \quad x^2 - a_2x + b_2, \quad \dots, \quad x^2 - a_nx + b_n,$$

причем все $2n$ чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ различны. Может ли случиться, что каждое из чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ является корнем одного из этих трёхчленов?

Задача 4. Дан приведенный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Все его коэффициенты, кроме старшего и свободного члена, делятся на n, а свободный член взаимно прост с n. Оказалось, что $P(x) = Q(x)R(x)^2$ для некоторых непостоянных многочленов $Q(x), R(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что степень много- члена $P(x)$ делится на n.

Группа B, 14.06.14

Производная многочлена — 2

Задачи из этого листка существенно сложнее задач из предыдущего. Если вы не решили какую-то из них, но у вас есть идеи, или вы хотите получить подсказку, обязательно подойдите ко мне.

Задача 1. При каких n многочлен $(x+1)^n + x^n + 1$ делится на: a) x^2+x+1; b) $(x^2+x+1)^2$; c) $(x^2+x+1)^3$?

Задача 2. Пусть $f, g, h = f+g$ — попарно взаимно простые многочлены степени n каждый. Оказалось, что у каждого из них есть ровно n корней. Докажите, что среди $3n$ корней многочлена fgh есть хотя бы $n+1$ различный.

Задача 3. Пусть даны $n > 1$ квадратных трёхчленов

$$x^2 - a_1x + b_1, \quad x^2 - a_2x + b_2, \quad \dots, \quad x^2 - a_nx + b_n,$$

причем все $2n$ чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ различны. Может ли случиться, что каждое из чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ является корнем одного из этих трёхчленов?

Задача 4. Дан приведенный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Все его коэффициенты, кроме старшего и свободного члена, делятся на n, а свободный член взаимно прост с n. Оказалось, что $P(x) = Q(x)R(x)^2$ для некоторых непостоянных многочленов $Q(x), R(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что степень много- члена $P(x)$ делится на n.