Косы.

Листок У2.1
(07.2015)

Определение 1. Группа кос из n нитей B_n — это группа, заданная образующими $s_1, \ldots, s_{n-1}$ и соотношениями $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ и $s_i s_j = s_j s_i$ при $|i-j| > 1$.

Задача 1. Докажите, что в группе кос справедливы следующие равенства (представляющие третье движение Райдемайстера) и нарисуйте приравниваемые косы:
а) $s_i^{-1} s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}^{-1}$; б) $s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} s_i = s_{i+1} s_i^{-1} s_{i+1}^{-1}$; в) $s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} s_i^{-1} = s_{i+1}^{-1} s_i^{-1} s_{i+1}^{-1}$.

Задача 2. а) Докажите, что элемент $(s_1 s_2)^3$ группы кос из трёх нитей B_3 принадлежит центру этой группы, то есть коммутирует со всеми остальными элементами.

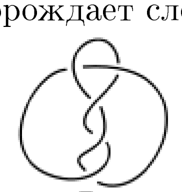
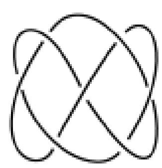
б) Найдите нетривиальный элемент центра группы B_4.

Задача 3. а) Докажите, что элемент $s_1 s_2^{-1}$ группы кос из трёх нитей принадлежит коммутанту этой группы.

б) Докажите, что ядро гомоморфизма $\varphi\colon B_n \to \mathbb{Z}$, переводящего $s_{i_1}^{k_1} s_{i_2}^{k_2} \ldots s_{i_m}^{k_m}$ в $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$, совпадает с коммутантом группы B_n.

Задача 4. Докажите, что группа кос из трёх нитей изоморфна группе, заданной образующими x, y и соотношением $x^3 = y^2$ (подсказка: $x = s_1 s_2$, $y = s_1 s_2 s_1$).

Задача 5. Нарисуйте (и запишите через образующие) косы, замыкание которых порождает следующие узлы:

а)  5_2 ; б)  6_1 ; в)  7_4 .

Задача 6. Докажите, что

а) какие-нибудь три из приведённых ниже кос; б) все эти косы
попарно неэквивалентны (то есть задают различные элементы группы B_3).