Условные вероятности, независимость событий, формулы полной вероятности и Байеса

Задача 1. Из множества чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ по схеме выбора без возвращения выбираются три числа. Найдите условную вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

Задача 2. Среди 25 экзаменационных билетов 5 "хороших". Два студента по очереди берут по одному билету. Найдите вероятность того, что a) первый студент взял "хороший" билет; b) второй студент взял "хороший" билет.

Задача 3. Из совокупности всех подмножеств множества $\{1, 2, \dots, N\}$ по схеме выбора с возвращением выбираются подмножества A_1, A_2. Для любых l_1, l_2 найдите условную вероятность

$$\mathbb{P}(|A_1| = l_1, |A_2| = l_2 | A_1 \cap A_2 = \emptyset).$$

Задача 4. Бросаются две игральные кости. Пусть на них выпало x и y очков. Выясните, какие из следующих событий являются независимыми:

$$A = \{x = 6\}, \quad B = \{y \leqslant 2\}, \quad C = \{x + y = 7\}, \quad D = \{x - y = 1\}, \quad E = \{|x - y| = 3\}.$$

Задача 5. Приведите пример трех попарно независимых, но зависимых в совокупности событий.

Задача 6. Существуют ли три попарно зависимых события, для которых выполнено равенство $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$?

Задача 7*. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — события, вероятности которых равны соответственно $p_1, \dots, p_n$. Известно, что $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_i) = p_1 \cdot \dots \cdot p_i$ при любом $i = 1, \dots, n$. Верно ли, что события $A_1, \dots, A_n$ попарно независимы?

Задача 8. Докажите, что если события A и B независимы, то независимы также пары событий A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Задача 9. Игральная кость брошена два раза. Пусть X_1, X_2 — количества очков, выпавших при этих испытаниях. Рассмотрим события

$$A_1 = \{2 \text{ делит } X_1, 3 \text{ делит } X_2\}, \;\; A_2 = \{3 \text{ делит } X_1, 2 \text{ делит } X_2\}, \;\; A_3 = \{X_2 \text{ делит } X_1\},$$

Перечислите все орграфы зависимостей для событий A_1, A_2, A_3.

Задача 10. В одной урне содержится 1 белый и 2 черных шара, а в другой урне — 2 белых и 3 черных шара. В третью урну кладут два шара, случайно выбранных из первой урны, и два шара, случайно выбранных из второй. Какова вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, будет белым?

Задача 11. Студент сдает тест. На очередную задачу имеется K вариантов ответа. Студент действует так: либо он умеет решать задачу, и тогда он с определенностью находит правильный ответ, либо он не умеет ее решать, и тогда он выбирает ответ наугад. Считается, априори, что студент умеет решать задачу с вероятностью p. Найдите вероятность того, что студент умел решать задачу, коль скоро полученный им ответ оказался верным.

Задача 12*. Имеется 10 белых и 10 черных шаров. Вам предлагают каким-то образом разложить эти шары по двум урнам. Далее случайно выбирается одна из урн, а из нее вытаскивается шар. Если он оказывается белым, то Вы получаете приз. Как нужно разложить шары по урнам, чтобы вероятность выиграть приз была наибольшей?