28 июня 2015 г.

Суммы квадратов-II. Теорема Ферма-Эйлера

Задача 1 (1 балл)**.** Докажите, что количество представлений числа n в виде суммы двух квадратов равно количеству представлений числа $2n$ в виде суммы двух квадратов.

Задача 2. $a)$ (1 балл) Докажите, что если числа a и b взаимно просты, то минимальным натуральным числом n, которое кратно $a+bi$ является a^2+b^2.
$b)$ (1 балл) Докажите, что натуральное число n делится на гауссово число $u=c+di$ тогда и только тогда, когда n кратно $\dfrac{c^2+d^2}{\text{НОД}(c,d)}$.

Задача 3 (1 балл)**.** Докажите, не вычисляя явно разложение на множители, что число $1000009 = 235^2+972^2$ составное.

Задача 4 (Геометрическое доказательство теоремы Вильсона, 2 балла)**.** Рассмотрим на плоскости правильный p-угольник $A_1A_2\dots A_p$. Пусть M — количество всех замкнутых p-звенных ломанных с концами в $A_1,\dots,A_p$, M_s — количество ломанных, которые переходят в себя при повороте на какой-то ненулевой угол вида $\frac{2\pi k}{p}$, M_a — количество остальных ломанных. Найдите M, M_s и докажите, что $M_a \vdots p$. Выведите отсюда теорему Вильсона.

Задача 5. Закончите "доказательство из Книги" представимости простого натурального числа $p=4n+1$ в виде суммы двух квадратов:

Рассмотрим множество M решений (x,y,z) уравнения $x^2+4yz=p$ ($p=4k+1$ — простое) в натуральных числах. Рассмотрим на два отображения $f_1, f_2\colon M\to M$:

$$f_1\colon (x,y,z)\to(x,z,y)$$

$$f_2(x,y,z)=\begin{cases}(x+2z,z,y-x-z), & x<y-z\\ (2y-x,y,x-y+z), & y-z<x_2y\\ (x-2y,x_y+z,y), & x>2y\end{cases}$$

$a)$ (1 балл) Докажите, что f_2 отображает M в M и $f_2\colon f_2$ — тождественное отображение.
$b)$ (2 балла) Найдите неподвижные точки f_2. Докажите, что $|M|$ нечетно.
$c)$ (1 балл) Докажите теорему о представимости числа p в виде суммы двух квадратов, найдя неподвижную точку у отображения f_1.

28 июня 2015 г.

Суммы квадратов-II. Теорема Ферма-Эйлера

Задача 1 (1 балл)**.** Докажите, что количество представлений числа n в виде суммы двух квадратов равно количеству представлений числа $2n$ в виде суммы двух квадратов.

Задача 2. $a)$ (1 балл) Докажите, что если числа a и b взаимно просты, то минимальным натуральным числом n, которое кратно $a+bi$ является a^2+b^2.

$b)$ (1 балл) Докажите, что натуральное число n делится на гауссово число $u=c+di$ тогда и только тогда, когда n кратно $\dfrac{c^2+d^2}{\text{НОД}(c,d)}$.

Задача 3 (1 балл)**.** Докажите, не вычисляя явно разложение на множители, что число $1000009 = 235^2+972^2$ составное.

Задача 4 (Геометрическое доказательство теоремы Вильсона, 2 балла)**.** Рассмотрим на плоскости правильный p-угольник $A_1A_2\dots A_p$. Пусть M — количество всех замкнутых p-звенных ломанных с концами в $A_1,\dots,A_p$, M_s — количество ломанных, которые переходят в себя при повороте на какой-то ненулевой угол вида $\frac{2\pi k}{p}$, M_a — количество остальных ломанных. Найдите M, M_s и докажите, что $M_a \vdots p$. Выведите отсюда теорему Вильсона.

Задача 5. Закончите "доказательство из Книги" представимости простого натурального числа $p=4n+1$ в виде суммы двух квадратов:

Рассмотрим множество M решений (x,y,z) уравнения $x^2+4yz=p$ ($p=4k+1$ — простое) в натуральных числах. Рассмотрим на два отображения $f_1, f_2\colon M\to M$:

$$f_1\colon (x,y,z)\to(x,z,y)$$

$$f_2(x,y,z)=\begin{cases}(x+2z,z,y-x-z), & x<y-z\\ (2y-x,y,x-y+z), & y-z<x_2y\\ (x-2y,x_y+z,y), & x>2y\end{cases}$$

$a)$ (1 балл) Докажите, что f_2 отображает M в M и $f_2\colon f_2$ — тождественное отображение.

$b)$ (2 балла) Найдите неподвижные точки f_2. Докажите, что $|M|$ нечетно.

$c)$ (1 балл) Докажите теорему о представимости числа p в виде суммы двух квадратов, найдя неподвижную точку у отображения f_1.