30 июня 2015 г.

Суммы квадратов-III. Кватернионы

Задача 1 (2 балла)**.** Докажите, что количество представлений числа $n \in \mathbb{N}$ в виде суммы двух квадратов целых чисел равно $4(d_1 - d_3)$, где d_1 (соответственно d_3) — количество натуральных делителей числа n вида $4k+1$ (соответственно $4k+3$).

Определение. Кватернионами $\mathbb{H}$ называется множество выражений вида $\{u = a + bi + cj + dk \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Складываются кватернионы покомпонентно, перемножаются путем обычного раскрытия скобок с учетом правил: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, jk = i, ki = j$, $ji = -k, kj = -i, ik = -j$. Сопряженным кватернионом к $u = a + bi + cj + dk$ называется $\bar{u} = a - bi - cj - dk$. Нормой кватерниона $u = a + bi + cj + dk$ называется $N(u) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Задача 2. Докажите, что *a*) (1 балл) умножение кватернионов ассоциативно; *b*) (1 балл) $\overline{u \cdot v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$; *c*) (1 балл) $N(u) = u \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot u$; *d*) (1 балл) если кватернион u коммутирует со всеми кватернионами, то $u = a \in \mathbb{R}$; *e*) (2 балла) множество ненулевых кватернионов образует группу относительно умножения.

Задача 3 (1 балл)**.** Выпишите явно тождество Эйлера о четырех квадратах.

Задача 4 (2 балла)**.** Докажите, что для всякого простого числа p найдутся такие a и b, что $a^2 + b^2 + 1$ кратно p.

Hint: рассмотрите множества остатков по модулю p: $X = \{k^2 \mid k = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ и $Y = \{-1 - k^2 \mid k = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ и покажите, что они пересекаются.

30 июня 2015 г.

Суммы квадратов-III. Кватернионы

Задача 1 (2 балла)**.** Докажите, что количество представлений числа $n \in \mathbb{N}$ в виде суммы двух квадратов целых чисел равно $4(d_1 - d_3)$, где d_1 (соответственно d_3) — количество натуральных делителей числа n вида $4k+1$ (соответственно $4k+3$).

Определение. Кватернионами $\mathbb{H}$ называется множество выражений вида $\{u = a + bi + cj + dk \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Складываются кватернионы покомпонентно, перемножаются путем обычного раскрытия скобок с учетом правил: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k, jk = i, ki = j$, $ji = -k, kj = -i, ik = -j$. Сопряженным кватернионом к $u = a + bi + cj + dk$ называется $\bar{u} = a - bi - cj - dk$. Нормой кватерниона $u = a + bi + cj + dk$ называется $N(u) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Задача 2. Докажите, что *a*) (1 балл) умножение кватернионов ассоциативно; *b*) (1 балл) $\overline{u \cdot v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$; *c*) (1 балл) $N(u) = u \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot u$; *d*) (1 балл) если кватернион u коммутирует со всеми кватернионами, то $u = a \in \mathbb{R}$; *e*) (2 балла) множество ненулевых кватернионов образует группу относительно умножения.

Задача 3 (1 балл)**.** Выпишите явно тождество Эйлера о четырех квадратах.

Задача 4 (2 балла)**.** Докажите, что для всякого простого числа p найдутся такие a и b, что $a^2 + b^2 + 1$ кратно p.

Hint: рассмотрите множества остатков по модулю p: $X = \{k^2 \mid k = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ и $Y = \{-1 - k^2 \mid k = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ и покажите, что они пересекаются.