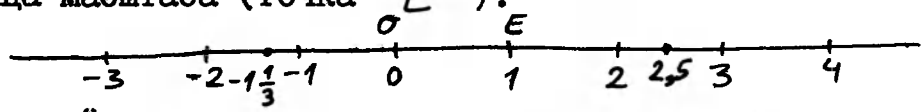
Листок I. Координаты на прямой.

Напоминания. Пусть на прямой выбрана точка O (начало координат) и единица масштаба (точка E).



Тогда всякой точке соответствует число, называемое ее координатой. Наоборот, для любого числа x можно найти точку, координата которой равна x. Вместо "точка с координатой x" мы будем говорить иногда коротко "точка x". При переводе на "язык точек" с "языка чисел" полезна такая таблица

числа	точки
число $x > 0$	точка x лежит справа от O
число x больше числа y	точка x лежит правее точки y
$\lvert x\rvert$	расстояние от точки x до точки O
$\lvert x-y\rvert$	расстояние между x и y

Напомним, что $|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$

Задачи

I. Чему равен $|-a|$ при $a<0$ – числу a или числу $-a$?

2. а) Известно, что $a \geq b$. Можно ли утверждать, что $|a| \geq |b|$?
б) Известно, что $a \leq b$ и $-a \leq b$. Можно ли утверждать, что $|a| \leq b$?

3. Нарисовать на прямой множества тех точек x, для которых
а) $x > 1$; б) $x - 2 \geq 2x$; в) $|x+1| = x+1$;
г) $|x-2| = |2-x|$; д) $|x+2| + |x+1| = 2$
(разберите случаи $x < -2$, $-2 \leq x \leq -1$, $x > -1$);
е) $|x+1| + |x-1| = 1$.

4. Доказать, что при всех x и y выполнено неравенство $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Указание. Рассмотреть 4 возможности: (а) $x \geq 0, y \geq 0$; (б) $x \geq 0, y < 0$; (в) $x < 0, y \geq 0$; (г) $x < 0, y < 0$.)

5. Дано, что $|x+2| \leq 3$, $|x-4| \leq 5$. Доказать, что $|x| \leq 1$.

6. Нарисовать множество тех точек x, для которых: а) $x^2 > 4$
б) из утверждений $x > 1$, $x > 2$, ..., $x > 10$ четное число верных;
в) $(x-1)(x-2)\ldots(x-10) \geq 0$.

7. а) Точки A и B имеют координаты a и b. Найти координату середины отрезка AB.
б) Решить уравнение $|x-a| = |x-b|$ (Надо указать, чему равно множество удовлетворяющих этому равенству значений x в зависимости от a и b.)

8*. Точка C лежит на отрезке AB и делит его в отношении $m:n$ (т.е. $AC/CB = m/n$). Найти координату точки C, если координаты точек A и B равны a и b. Рассмотрите сначала случай $m=1, n=2$.

9*. При каких значениях a уравнение $|x+3| + |x-1| = a$ не имеет решения, имеет одно решение, два решения, бесконечно много решений? (Решение уравнения - число, при подстановке которого вместо переменной получается верное равенство.)

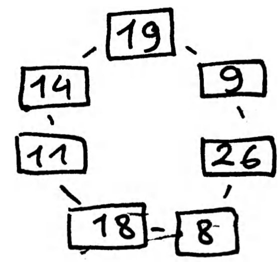
10*. Найти наименьшее значение выражения

$$|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-10|$$

При каком x оно достигается?

11*. На прямом шоссе через равные промежутки стоят 10 домов. Где нужно вырыть колодец, чтобы суммарное расстояние от всех домов до колодца было как можно меньше? А если промежутки между домами различны?

12*. На окружности расположено 7 коробок со спичками (внутри указано число спичек):



За один шаг разрешается переложить спичку из любой коробки в соседнюю. Придумать способ уравнять количества спичек во всех коробках за минимальное число шагов. Доказать, что меньшим числом шагов обойтись нельзя.

Через $[x]$ (целая часть x) обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[2]=2$, $[3\frac{1}{3}]=3$, $[-3\frac{1}{3}]=-4$.

13. Какие значения может принимать выражение $[x]+[-x]$?

14. Нарисовать множество тех x, для которых:

а) $x=[x]$; б) $[x]=[x+\frac{1}{3}]$.

15*. Доказать, что если a, b, c - положительные числа и число c целое, то

$$\left[\frac{a}{bc}\right]=\left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right]$$

ПАМЯТКА

Для записи решений задач следует иметь специальную тетрадь (желательно общую). Задачи принимаются только **после того**, как их решения будут записаны в тетради. Эту тетрадь, так же как и выдаваемые Вам листки, следует приносить на каждый урок.

Задачи делятся на обязательные и дополнительные. Если Вам не будет сказано особо, обязательными для Вас являются задачи, <u>не</u> помеченные звездочкой (*). Листок считается пройденным, только если сданы все обязательные задачи. Мы советуем Вам завести список номеров всех задач, где отмечать, какие задачи Вы сдали (пункты а), б) и т. д. считаются отдельными задачами).

Желаем успехов!