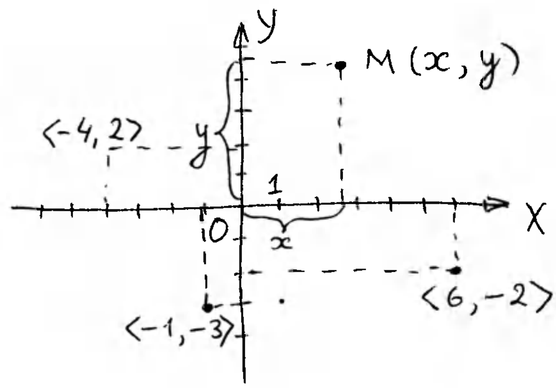
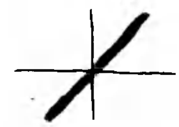
Листок 2. Координаты на плоскости.

Напоминания. Нарисуем на плоскости две перепндикулярные прямые OX и OY и отметим единицу масштаба. Тогда каждой точке M плоскости соответствует пара чисел $\langle x, y\rangle$ называемых ее координатами (см. рисунок), и для любой пары чисел $\langle x, y\rangle$ можно найти точку с такими координатами. Вместо "точка с координатами $\langle x, y\rangle$" мы будем говорить "точка $\langle x, y\rangle$".



Пример. Нарисовать на плоскости множество тех точек $\langle x, y\rangle$, для которых $x = y$.

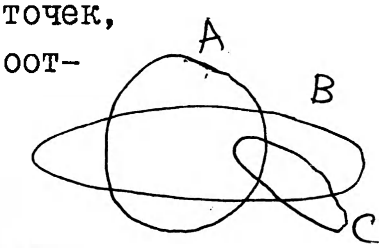
Решение. Точки $\langle x, y\rangle$, для которых $\langle x = y\rangle$, лежат на прямой, делящей угол XOY пополам.



Задачи.

1. Нарисовать множество тех точек $\langle x, y\rangle$, для которых:
а) $x > y$; б) $x = 1$; в) $xy = 0$; г) $x^2 + y^2 = 0$; д) $x + y = 0$;
е) $x^2 - y^2 = 0$; ж) $x > y$ и $x > -y$; з) $x > y$ или $x > -y$;
и) $|x-1| < 0{,}1$; к) $|x-1| < 0{,}1$ и $|y-2| < 0{,}2$; л)* $xy < 1$;
м)* $[x] = [y]$; н)* $\{x\} = \{y\}$.

2. Множества A, B и C состоят из точек, попадающих внутрь линий на рисунке, обозначенных соответствующими буквами. Можно ли утовереждать, что:
а) если $x \in A$ и $x \in B$, то $x \in C$?
б) если $x \in A$ и $x \notin B$, то $x \notin C$?
в) если $x \notin B$, то $x \notin A$ или $x \notin C$?

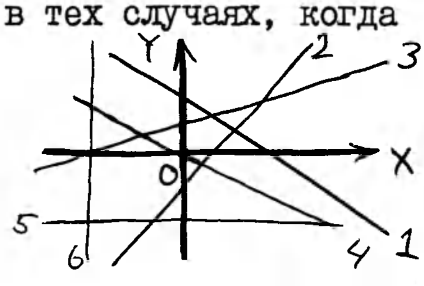


3. Нарисовать те точки $\langle x, y\rangle$, для которых $x = y$, $x^2 = y^2$, $x^3 = y^3$ (три рисунка). Можно ли утверждать, что:
а) если $x = y$, то $x^2 = y^2$? б) если $x^2 = y^2$, то $x = y$?
в) если $x^3 = y^3$, то $x = y$? г)* если $x + x^3 = y + y^3$, то $x = y$?

4. Точки $\langle 3, 2\rangle$ и $\langle a, -1\rangle$ расположены на одной прямой, параллельной оси OY. Найти a.

Напоминания. Множество точек $\langle x, y\rangle$, удовлетворяющих условию $y = kx + b$, является прямой. Таким образом может быть задана любая прямая, кроме вертикальных. К этому виду можно преобразовать и уравнение $ax + by + c = 0$, если $b \neq 0$ ($y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$); при $b = 0$ получается вертикальная прямая $x = -c/a$ (при $a \neq 0$). Прямые $y = kx + b$ и $y = k_1 x + b_1$ параллельны в тех случаях, когда $k = k_1$ и $b \neq b_1$.

5. Прямые 1,2,3,4,5,6 заданы уравнениями вида $y = kx + b$. Определить для каждой из них знаки чисел k и b.



Координаты на плоскости (продолжение)

6. Точки $\langle 0,1\rangle$ и $\langle 2,3\rangle$ лежат на прямой $y=kx+b$. Найти k и b.

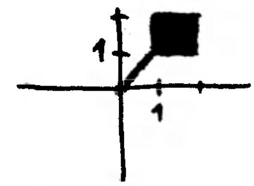
7. Уравнения $y=2x+3$ и $x=ay+b$ задают одну и ту же прямую. Найти a и b.

8. Нарисовать множества тех точек $\langle x,y\rangle$, для которых:
а) $x>2y$; б) $3x<-4y$; в) $2x<2y+4$; г) $2x+3y=5$.

9. Известно, что $x>y$ и $x>3y$. Можно ли утверждать, что $x>2y$? Нарисовать соответствующие множества.

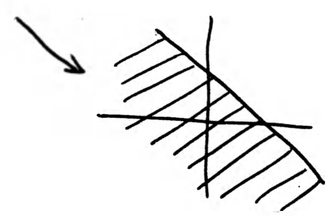
10. а) Точки $\langle 3,a\rangle$ и $\langle b,-5\rangle$ симметричны относительно прямой OX. Найти a и b. б) Тот же вопрос, если они симметричны относительно начала координат.

11. Множество A изображено на рисунке. Нарисовать множество тех $\langle x,y\rangle$, для которых
а) $\langle x,-y\rangle\in A$ (Запись: $\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,-y\rangle\in A\}$);
б) $\{\langle x,y\rangle \mid \langle -x,-y\rangle\in A\}$; в) $\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y+1\rangle\in A\}$;
г)* $\{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle\in A\}$; д)* $\{\langle x,y\rangle \mid \langle \frac{x}{2},\frac{y}{2}\rangle\in A\}$; е)* $\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,x+y\rangle\in A\}$

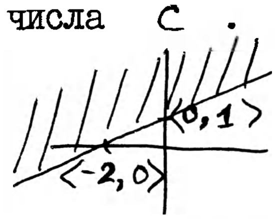


12.* Точка A с координатами $\langle x,y\rangle$ повернута на 90° против часовой стрелки вокруг начала координат. Найти координаты полученной точки B.

13. Заштриховано множество всех тех $\langle x,y\rangle$, для которых $ax+by+c>0$ Определить знак числа c.



14. Заштриховано множество всех тех $\langle x,y\rangle$, для которых
$ax+by+1<0$
Найти a и b.



15. Найти точку пересечения прямых $y=2x+1$ и $x+y=7$.

16.* Доказать, что если прямые $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ не пересекаются, то $k=k_1$ и $b\neq b_1$.

17.* Известно, что $|x+y|\le 1$ и $|x-2y|\le 2$. Какие значения может принимать x?

18.* а) Прямая $y=\frac{7}{15}x+\frac{1}{3}$ проходит через целочисленные точки $\langle 10,5\rangle$ и $\langle -20,-9\rangle$ (целочисленные точки – точки, обе координаты которых целые). Есть ли на ней другие целочисленные точки?

б) Прямая $y=kx+b$ проходит через 2 целочисленные точки. Может ли на ней не быть других целочисленных точек?

в) Существует ли прямая, не проходящая ни через одну целочисленную точку?

г) Существует ли прямая, проходящая ровно через одну целочисленную точку?

19.* В двух баках хранятся два раствора с разным процентным содержанием кислоты. Из этих растворов составлен 1 л 96%-го раствора и 0,5 л 40%-го раствора, причем на это было израсходовано 14/15 л раствора из 1-го бака и 17/30 л раствора из 2-го бака. Найти процентное содержание кислоты в обоих баках.