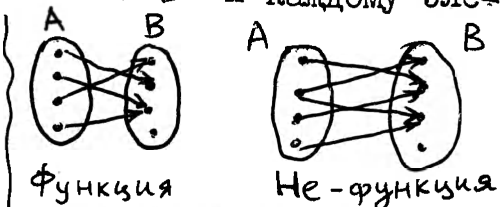
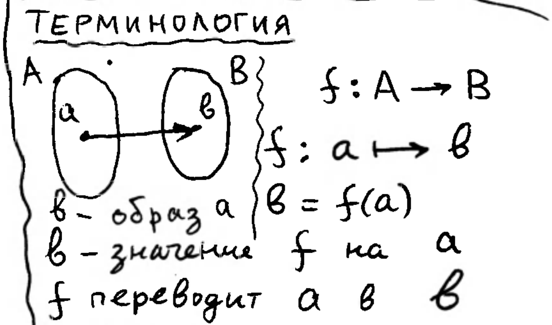
Листок 3. Функции и графики.

Напоминание. Пусть имеются множества A и B и каждому элементу множества A сопоставлен (ровно один) элемент множества B. В таком случае говорят, что задана функция, отображающая множество A в множество B. Если f – функция, отображающая A в B, то пишут так: $f : A \longrightarrow B$.

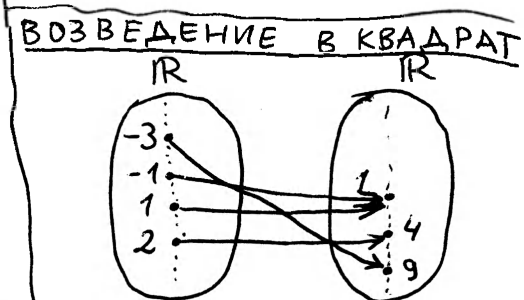




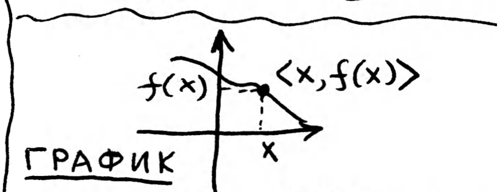
Если функция f сопоставляет элементу $a \in A$ элемент $b \in B$, то b называется значением f на a и обозначается $f(a)$. Пишут и так:

$f: a \mapsto b$ (f переводит a в b)

Пример. Функция f, "возведение в квадрат" ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) сопоставляет каждому числу его квадрат: $f(x) = x^2$, $f: x \longmapsto x^2$.

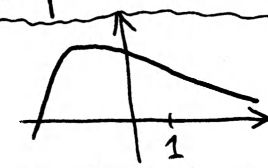


В этом листке мы будем рассматривать числовые функции – функции, у которых A и B суть некоторые множества действительных чисел. Такие функции изображаются с помощью графиков. Графиком числовой функции называется множество всех тех точек $\langle x, y \rangle$ у которых $y = f(x)$.

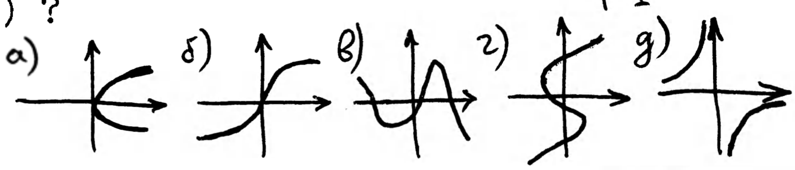


Задачи.

1. График функции f изображен на рисунке. Что больше: $f(2)$ или $f(3)$?



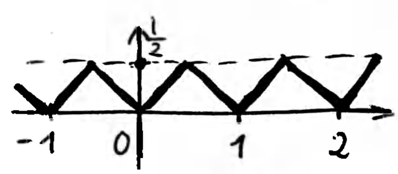
2. Какие из изображенных множеств являются графиками?



3. Функция f называется возрастающей, если $f(x) < f(y)$ при любых x и y, для которых $x < y$. Какие из функций, графики которых изображены на рисунках к задаче 2, являются таковыми?

4. Построить графики функций: а) $x \longmapsto |x|$; б) $x \longmapsto x^2$; в) $x \longmapsto [x]$; г) $x \longmapsto \{x\}$.

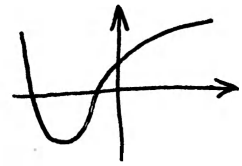
5*. Написать формулу (содержащую знаки $\{ \}$ (дробная часть), $| \ |$ (модуль) и арифметические знаки), задающую функцию, график которой изображен на рисунке.



6*. Обозначим через $\min(a,b)$ и $\max(a,b)$ наименьшее и наибольшее из чисел a и b. Написать формулы для $\min(a,b)$ и $\max(a,b)$, содержащие знак модуля и знаки арифметических действий.

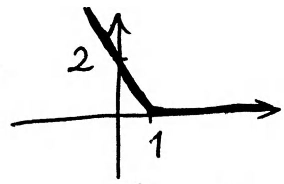
Функции и графики – 2

7. График функции f изображен на рисунке:

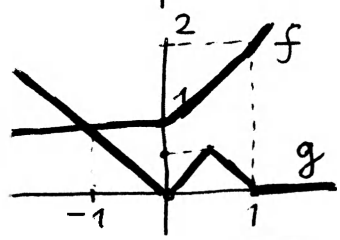


Скопировать этот рисунок в 9 – I2 экземплярах и нарисовать на этих же рисунках графики функций:
а) $x\mapsto f(x)+1$; б) $x\mapsto f(x-1)$; в) $x\mapsto f(x+1)$; г) $x\mapsto f(2x)$;
д) $x\mapsto 2f(x)$; е) $x\mapsto |f(x)|$; ж) $x\mapsto f(|x|)$; з) $x\mapsto -f(x)$;
и) $x\mapsto f(-x)$; к)* $x\mapsto 1/f(x)$; л)* $x\mapsto (f(x))^2$; м)* $x\mapsto f(x)+x$.

8*. Построить график функции g, если: а) $g(x)=f(2x+1)$;
б) $g(x)=f(|x|+1)+1$;
в) $g(x)=f(f(x))$, а график f таков:



9*. Даны графики функций f и g:



Нарисовать графики функций: а) $x\mapsto f(x)+g(x)$;
б) $x\mapsto f(x)-g(x)$; в) $x\mapsto f(x)\cdot g(x)$;
г) $x\mapsto 1/f(x)$; д) $x\mapsto f(g(x))$; е) $x\mapsto g(f(x))$.

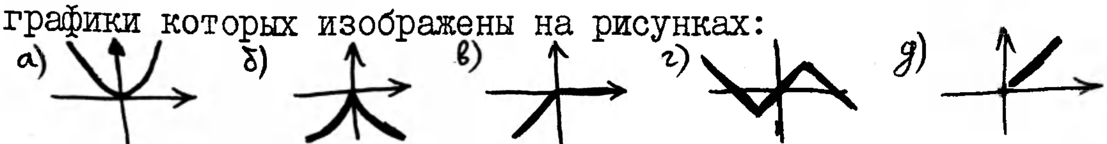
I0. а) Построить на одном чертеже графики функций $x\mapsto x^2$ и $x\mapsto x+2$. Найти их точки пересечения. б) Сколько решений имеет уравнение $x^2=x+2$?

II*. Сколько решений имеет уравнение $x^3=10-x$?

Функция f, определенная на множестве M, называется <u>чётной</u>, если выполнены такие условия: (I) если $x\in M$, то $-x\in M$; (2) для всех $x\in M$ выполнено равенство $f(x)=f(-x)$;

Заменяя (2) на (2$'$): для всех $x\in M$ выполнено $f(-x)=-f(x)$, получаем определение <u>нечётной</u> функции.

I2. Являются ли четными или нечетными функции, графики которых изображены на рисунках:



I3. Являются ли четными или нечетными функции: а) $x\mapsto |x|$;
б) $x\mapsto x+x^3$; в) $x\mapsto(|x|+2)^3-27|x|$; г) $x\mapsto x+|x|$;
д)* $x\mapsto |x+1|+|x-1|$.

I4. а) Доказать, что функция f является четной тогда и только тогда, когда OY является осью симметрии ее графика. (Нужно доказать: (I) если f четна, то график f симметричен; (2) если график f симметричен, то f четна.)

б) Доказать, что функция f является нечетной тогда и только тогда, когда O является центром симметрии графика f.

I5. а) Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ четна, функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ нечетна, $f(1)+g(1)=5$, $f(-1)+g(-1)=3$. Найти $f(1)$ и $g(1)$.

б)* Пусть $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – любая функция. Доказать, что можно найти такую четную функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и такую нечетную функцию $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ чтобы при всех $x\in\mathbb{R}$ выполнялось равенство $h(x)=f(x)+g(x)$.

16.* Существует ли функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, одновременно являющаяся возрастающей и четной?

17. Построить графики функций: а) $x \mapsto x^2+1$; б) $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$;
в) $x \mapsto 3/(x^2+1)$; г) $x \mapsto 3x^2-1$; д) $x \mapsto \frac{1}{3x^2-1}$;
е) $x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$; ж)* $x \mapsto |x-1|+|x+1|$;
з) $x \mapsto -(|x|+2)^2$; и) $x \mapsto |2x+1|+1$.

18.* График функции $f: [0,1] \to [0,1]$ изображен на рисунке. Нарисовать графики функций

а) $g: x \mapsto f(f(x))$;
б) $h: x \mapsto f(f(f(x)))$
в) Сколько решений имеет система уравнений: $y=f(x)$, $z=f(y)$, $f(z)=\frac{1}{2}$

(Решением называется тройка чисел $\langle x, y, z \rangle$, удовлетворяющая всем уравнениям системы.)

19.* Придумать такую функцию f, чтобы для всех $x \in \mathbb{R}$ было выполнено равенство $f(x+1) = f(x)+2$
Существуют ли две различных функции с таким свойством?

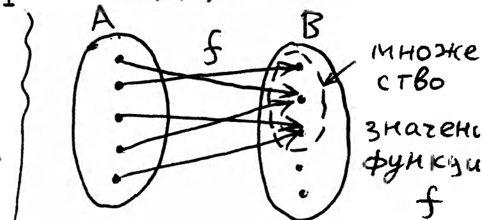
20.* Функция $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что при всех $x, y \in [0,1]$ выполнено неравенство $|f(y) - f(x)| \le (y-x)^2$.
Доказать, что $f(0) = f(1)$ и, более того, f – постоянная функция (всюду равная одному и тому же числу).

21.* Придумать такую функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы при любом $a \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = a$ имело бы бесконечно много решений.

22.* Известно, что график функции f – прямая, $-1 \le f(0) \le 1$, $3 \le f(2) < 5$. Чему может быть равно: а) $f(4)$; б) $f(-2)$?

Листок 4. Функции.

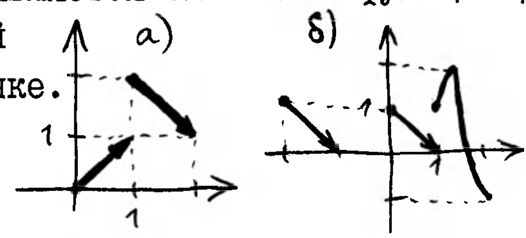
Напоминание. Пусть $f: A \to B$. Тогда множество A называется областью определения функции f, а множество всех $y \in B$, которые являются значениями функции f на некоторых $x \in A$, называется множеством значений функции f.



Задачи.

1. Определить множество значений функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если: а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = |x| + 1$; в) $f(x) = |x+1|$.
(Чтобы доказать, что множество значений функции f равно некоторому X, нужно доказать два утверждения: (1) все значения функции f принадлежат X; (2) любой элемент X является значением функции.)

2. Найти области определения и значений функций, графики которых изображены на рисунке.



3. Найти область значений функций:
а) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{при } x \in [-3, 2] \\ \text{не определено иначе} \end{cases}$
б) $g(x) = [x]$; в) $h(x) = \{x\}$.

4. Построить функции: а) с областью определения $]-1, 1[$ и областью значений $[0, 2[$; б)* с областью определения $[-1, 1]$ и областью значений $]-1, 1[$; в)* с областью определения $]-1, 1[$ и областью значений $[-1, 1]$; г)* с областью определения $]0, 1[$ и областью значений $\mathbb{R}$.

Определения. Функция $f: A \to B$ называется: а) наложением, если область значений ее совпадает с B; б) вложением, если различным элементам A соответствуют различные элементы B: из $x \neq y$ следует $f(x) \neq f(y)$; в) взаимно однозначным соответствием между A и B если она одновременно является и вложением, и наложением.

5. Какие из приведенных ниже функций являются наложениями, вложениями и взаимно однозначными соответствиями?

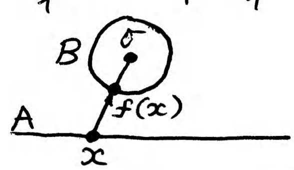
а) A = множество учеников 7б класса, B = множество всех букв русского алфавита, $f: x \mapsto$ (первая буква фамилии ученика x)

б) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $f: x \mapsto [x]$

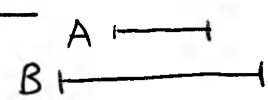
в) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$, $f: x \mapsto x$

В пунктах г – е $A = [0,1]$, $B = [0,1]$.

ж) A = прямая, B = окружность, $f(x)$ = точка пересечения луча Ox с окружностью.

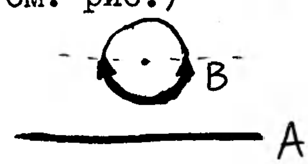


6. Придумать взаимно однозначное соответствие $f: A \to B$, если: а) A, B – отрезки (см. рис.)



б) $A = [0,1]$, $B = [0,2]$;

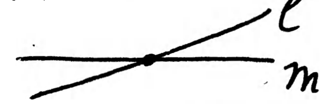
в)* A – прямая, B – полуокружность (без концов), г)* $A =]0,1[$, $B = \mathbb{R}$



д)* $A =]0,1]$, $B = [0,1]$; е) A = множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, B = множество четных натуральных чисел; ж)* $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$; з)* $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$

Листок Д. I. Функции (дополнительные задачи).

Обозначения. Пусть $f: A \to B$, $g: B \to C$. Функция (=отображение) $x \mapsto g(f(x))$ называется <u>композицией</u> функций f и g и обозначается $g \circ f$. Таким образом, $g \circ f(x) = g(f(x))$.



I. Прямые ℓ и m образуют угол в 7^0. Обозначим через f отображение осевой симметрии относительно ℓ, а через g – относительно m. Найти $g \circ f$ и $f \circ g$.

2. Пусть A и B – две точки, f и g – центральные симметрии относительно A и B. Найти $f \circ g$ и $g \circ f$.

3. Точка O называется <u>центром симметрии</u> множества M (состоящего из точек плоскости), если при центральной симметрии относительно O множество M переходит в себя. Доказать, что если множество M имеет более одного центра симметрии, то оно имеет бесконечно много центров симметрии.

4. Рассмотрим 8 отображений плоскости в себя, задаваемых (в координатах) формулами $\langle x, y\rangle \mapsto \langle \pm x, \pm y\rangle$ (4 варианта) и $\langle x, y\rangle \mapsto \langle \pm y, \pm x\rangle$ (4 варианта). Убедиться, что композиция любых двух отображений этого списка снова входит в список, и составить таблицу умножения (из 8 строк и 8 столбцов).

5. Взаимно однозначное отображение (=функция) $f: A \to A$, где A – конечное множество, называется <u>перестановкой</u> множества A. Обычно в качестве A берут множество $\{1, 2, \ldots, k\}$ и перестановку записывают в виде таблицы из двух строк; например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ или, короче, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ обозначает перестановку, переводящую I в 3, 3 в I, а 2 и 4 – в себя. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Найти перестановку f множества $\{1,2,3,4\}$, для которой $f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

7. Доказать, что для любой перестановки f найдется такое n, что $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}} = e$ (через e обозначена <u>тождественная</u> перестановка, оставляющая все числа на месте). Наименьшее такое n называется <u>порядком</u> перестановки f.

8. Существуют ли перестановки множества $\{1,2,3,4,5\}$, имеющие порядок: а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 7?

9. Найти число перестановок множества из k элементов.

I0. <u>Транспозицией</u> называется перестановка, меняющая два числа местами и оставляющая все остальные числа на месте. Доказать, что если композиция n транспозиций равна e, то число n четно.

II. Доказать, что всякая перестановка представляется в виде композиции транспозиций.

Листок Д. I. Функции (дополнительные задачи) - 2

I2. Согласно задаче II, всякая перестановка f может быть представлена в виде произведения (=композиции) некоторого числа транспозиций. Таких представлений может быть, конечно, много. Доказать, что либо во всех них четное число транспозиций (тогда f называется <u>четной</u> перестановкой), либо во всех них нечетное число транспозиций (тогда f называется <u>нечетной</u> перестановкой). Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных перестановок четно, а произведение четной и нечетной перестановок нечетно.

Учет решенных задач ______________________

(фамилия, имя)

номера	I	2	3	4	5	6	7	8а	8б	8в	8г	8д	9	I0	II	I2
записаны																
приняты когда																
кем																

Свободное место в концах листков мы будем использовать для задач олимпиадного характера. Быть может, Вы захотите попробовать свои силы на их решении.

Замостить треугольник отрезками. (Это означает, что нужно указать такое множество отрезков, чтобы каждая точка треугольника лежала ровно на одном из них.) Решить ту же задачу для круга.

На сколько частей делят плоскость 20 прямых, любые две из которых пересекаются и никакие три из которых не имеют общей точки?

Из каждой вершины треугольника проведен отрезок, соединяющий ее с некоторой внутренней точкой противоположной стороны. Доказать, что середины этих отрезков не могут лежать на одной прямой.

Плоскость раскрашена в два цвета. Возможно ли, чтобы любая пара точек, находящихся друг от друга на расстоянии I см, была закрашена: а) одинаково; б) по-разному?

Точки А и В находятся на плоскости на расстоянии 5,3 см. Блоха может прыгнуть в любом направлении, но ровно на I см. Может ли она из А допрыгнуть в В ?

Нарисовать какой-нибудь многоугольник и точку внутри него так, чтобы ни одна сторона не была видна из этой точки полностью.

Один выпуклый четырехугольник помещен внутри другого. Может ли сумма диагоналей внутреннего быть больше суммы диагоналей внешнего?

Разделить угол в I9 градусов на I9 равных частей с помощью циркуля и линейки.

Можно ли замостить доску I0 на I0 прямоугольниками I на 4 ?

На плоскости нарисован выпуклый I982-угольник, разбитый на I98I треугольник. Доказать, что можно провести прямую так, чтобы отсечь ровно один из этих треугольников.

Несколько окружностей разбивают плоскость на части. Нужно покрасить некоторые части белой краской, а остальные - черной, причем так, чтобы любые соседние (имеющие общую границу) части были покрашены по-разному. Докажите, что это всегда возможно.