

Листок Д. I. Функции (дополнительные задачи).

Обозначения. Пусть $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$. Функция (=отображение) $x \mapsto g(f(x))$ называется композицией функций f и g и обозначается $g \circ f$. Таким образом, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

I. Прямые l и m образуют угол в 70° . Обозначим  через f отображение осевой симметрии относительно l , а через g - относительно m . Найти $g \circ f$ и $f \circ g$.

2. Пусть A и B - две точки, f и g - центральные симметрии относительно A и B . Найти $f \circ g$ и $g \circ f$.

3. Точка O называется центром симметрии множества M (состоящего из точек плоскости), если при центральной симметрии относительно O множество M переходит в себя. Доказать, что если множество M имеет более одного центра симметрии, то оно имеет бесконечно много центров симметрии.

4. Рассмотрим 8 отображений плоскости в себя, задаваемых (в координатах) формулами $\langle x, y \rangle \mapsto \langle \pm x, \pm y \rangle$ (4 варианта) и $\langle x, y \rangle \mapsto \langle \pm y, \pm x \rangle$ (4 варианта). Убедиться, что композиция любых двух отображений этого списка снова входит в список, и составить таблицу умножения (из 8 строк и 8 столбцов).

5. Взаимно однозначное отображение (=функция) $f: A \rightarrow A$, где A - конечное множество, называется перестановкой множества A . Обычно в качестве A берут множество $\{1, 2, \dots, k\}$ и перестановку записывают в виде таблицы из двух строк; например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ или, короче, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ обозначает перестановку, переводящую 1 в 3, 3 в 1, а 2 и 4 - в себя. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Найти перестановку f множества $\{1, 2, 3, 4\}$, для которой $f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

7. Доказать, что для любой перестановки f найдется такое n , что $f \circ f \circ \dots \circ f \underset{n \text{ раз}}{=} e$ (через e обозначена тождественная перестановка, оставляющая все числа на месте). Наименьшее такое n называется порядком перестановки f .

8. Существуют ли перестановки множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, имеющие порядок: а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 7?

9. Найти число перестановок множества из k элементов.

10. Транспозицией называется перестановка, меняющая два числа местами и оставляющая все остальные числа на месте. Доказать, что если композиция n транспозиций равна e , то число n четно.

II. Доказать, что всякая перестановка представляется в виде композиции транспозиций.

12. Согласно задаче II, всякая перестановка f может быть представлена в виде произведения (=композиции) некоторого числа транспозиций. Таких представлений может быть, конечно, много. Доказать, что либо во всех них четное число транспозиций (тогда f называется четной перестановкой), либо во всех них нечетное число транспозиций (тогда f называется нечетной перестановкой). Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных перестановок четно, а произведение четной и нечетной перестановок нечетно.

Учет решенных задач

(ФАМИЛИЯ, ИМЯ)

номера	I	2	3	4	5	6	7	8а	8б	8в	8г	8д	9	10	11	12
записаны																
приняты когда																
кем																

Свободное место в концах листков мы будем использовать для задач олимпиадного характера. Быть может, Вы захотите попробовать свои силы на их решении.

Замостить треугольник отрезками. (Это означает, что нужно указать такое множество отрезков, чтобы каждая точка треугольника лежала ровно на одном из них.) Решить ту же задачу для круга.

На сколько частей делят плоскость 20 прямых, любые две из которых пересекаются и никакие три из которых не имеют общей точки?

Из каждой вершины треугольника проведен отрезок, соединяющий ее с некоторой внутренней точкой противоположной стороны. Доказать, что середины этих отрезков не могут лежать на одной прямой.

Плоскость раскрашена в два цвета. Возможно ли, чтобы любая пара точек, находящихся друг от друга на расстоянии 1 см, была закрашена: а) одинаково; б) по-разному?

Точки А и В находятся на плоскости на расстоянии 5,3 см. Блоха может прыгнуть в любом направлении, но ровно на 1 см. Может ли она из А допрыгнуть в В?

Нарисовать какой-нибудь многоугольник и точку внутри него так, чтобы ни одна сторона не была видна из этой точки полностью.

Один выпуклый четырехугольник помещен внутри другого. Может ли сумма диагоналей внутреннего быть больше суммы диагоналей внешнего?

Разделить угол в 19 градусов на 19 равных частей с помощью циркуля и линейки.

Можно ли замостить доску 10 на 10 прямоугольниками 1 на 4?

На плоскости нарисован выпуклый 1982-угольник, разбитый на 1981 треугольник. Доказать, что можно провести прямую так, чтобы отсечь ровно один из этих треугольников.

Несколько окружностей разбивают плоскость на части. Нужно покрасить некоторые части белой краской, а остальные - черной, причем так, чтобы любые соседние (имеющие общую границу) части были покрашены по-разному. Докажите, что это всегда возможно.