Квадратный трехчлен: график и простейшие свойства

Напоминаем, что графиком функции f называется множество точек плоскости с такими координатами $\langle x, y\rangle$, что $y = f(x)$.

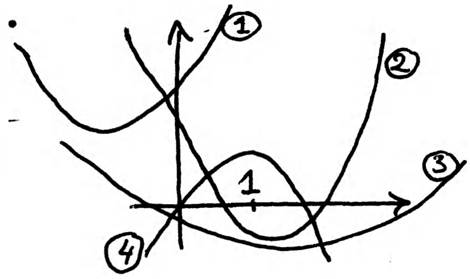
1. Постройте графики функций $x \mapsto (x-5)^2$, $x \mapsto x^2-5$, $x \mapsto 5x^2$.

2. Найдите a, b и c, если график функции $x \mapsto ax^2+bx+c$ получается сдвигом графика функции $x \mapsto x^2$ на 3 единицы вправо и на 5 единиц вниз.

3. Рассмотрим функцию "растяжение (вдоль оси x) в 2 раза", переводящую точку $\langle u, v\rangle$ в точку $\langle 2u, v\rangle$. Применим её ко всем точкам графика функции $x \mapsto x^2$. График какого квадратного трехчлена получится?

4. Преобразованием гомотетии с коэффициентом k называется отображение (=функция) $\langle u, v\rangle \mapsto \langle ku, kv\rangle$. Найдите преобразование гомотетии, переводящее график $x \mapsto x^2$ в график $x \mapsto ax^2$.

5. Определите знаки a, b и c для квадратных трехчленов вида ax^2+bx+c, графики которых изображены на рисунке.



6* Определите знак числа $a+b+c$ для квадратных трехчленов из предыдущей задачи.

7. Нарисуйте график $x \mapsto x^2-2x$. При каких a уравнение $x^2-2x=a$ имеет решение?

8. При каких c система уравнений $y=x^2$, $y=x+c$ имеет единственное решение? Нарисуйте графики $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x+c$ при этих c.

9. Нарисуйте (на одном рисунке) множества точек $\{\langle x,y\rangle \mid y=x^2\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid x=y^2\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid y=\sqrt{x}\}$

10. Нарисуйте графики функций $x \mapsto 0.001x^2$ и $x \mapsto 1000x+1$. Сколько точек пересечения они имеют?

11.* Найдите такое c, что при всех $x>c$ выполнено неравенство $0.001x^2-1000x-1000>1000000$.

12. Нарисуйте множества $\{\langle x,y\rangle \mid y=ax^2+b|x|+c\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid y=|ax^2+bx+c|\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid |y|=ax^2+b|x|+c\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid |y|=|ax^2+b|x|+c|\}$ если график функции $x \mapsto ax^2+bx+c$ изображен на рисунке.

13.* Докажите, что если квадратный трехчлен ax^2+bx+c принимает целые значения при всех целых значениях x, то $2a$, $a+b$ и c – целые числа. Докажите, что верно и обратное: если $2a$, $a+b$ и c – целые числа, то во всех целых точках значения функции – целые.

14. Какая прямая является осью симметрии графика $x \mapsto x^2+px+q$? Каково наименьшее значение функции $x \mapsto x^2+px+q$?

15.* Найти x, при котором выражение $(x-a_1)^2+\ldots+(x-a_n)^2$ принимает наименьшее значение.

Квадратный трехчлен: график и простейшие свойства (продолжение)

I6. В равнобедренный треугольник с основанием $2a$ и высотой h вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на основании, а две другие – на боковых сторонах. Какую наибольшую площадь может иметь этот прямоугольник?

I7.* Назовем уклонением квадратного трехчлена на отрезке $[a, b]$ наибольшее значение его модуля на этом отрезке. Найти квадратный трехчлен, старший коэффициент которого равен 1, имеющий наименьшее возможное уклонение (1) на отрезке $[-1, 1]$ (2) на отрезке $[1, 2]$

I8.* Доказать, что квадратный трехчлен со старшим коэффициентом 1 не может принимать в трех целых точках значения, лежащие в интервале $]0, 1[$.

Квадратный трехчлен и квадратные уравнения

Напомним, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ при $a\neq 0$ имеет два корня, если $D=b^2-4ac>0$, один корень, если $D=0$ и не имеет корней, если $D<0$. Корни можно найти по формуле
$$x_{12}=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$$

1. (Теорема, обратная к теореме Виета) Пусть a, b – любые числа, $p=-(a+b)$, $q=ab$. Доказать, что квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни a и b и не имеет других корней.

2. (Теорема Виета) Пусть квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни a и b. Доказать, что $p=-(a+b)$, $q=ab$. (Указание. Можно воспользоваться формулой корней квадратного уравнения, но можно и "поделить на $x-a$", т.е. записать $x^2+px+q=$ $=(x-a)(x+(p+a))+q+a(p+a)$ и затем подставить $x=a$ и $x=b$.)

3. Придумать квадратное уравнение с корнями (1) 1 и 2; (2) 0 и 3.

4. Верны ли такие утверждения: (1) если корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ различны и рациональны, то p и q рациональны; (2) если корни квадратного уравнения различны и иррациональны, то p и q иррациональны.

5. Известно, что $x+y=a$, $xy=b$. Выразить через a и b (1) x^2+y^2 (2) x^3+y^3 (3) x^4+y^4 (4) $1/x^2+1/y^2$

6.* Даны попарно различные числа x_1, x_2 и x_3 и число a. Построить квадратичную функцию f, для которой $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$, $f(x_3)=a$.

7.* Доказать, что через любые три точки плоскости, никакие две из которых не лежат на одной вертикальной прямой, можно провести график квадратного трехчлена. (Указание. Трижды воспользуйтесь предыдущей задачей).

8.* (Продолжение) Докажите, что такой график единствен.

9.* Доказать тождество: $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1.$

(Указание. Эту задачу можно решить устно, используя задачу 8.)

Квадратный трехчлен и квадратные уравнения (продолжение)

I0. Нарисуйте на плоскости множество тех точек $\langle p, q\rangle$, для которых уравнение $x^2+px+q=0$ (I) не имеет корней; (2) имеет один корень; (2) имеет 2 корня.

II.* Нарисуйте на плоскости множество тех точек $\langle p, q\rangle$, при которых уравнение $x^2+px+q=0$ (I) имеет корень 0; (2) имеет один положительный и один отрицательный корень; (3) имеет хотя бы один положительный корень.

I2. Нарисуйте на плоскости множество тех точек $\langle a, b\rangle$, при которых уравнение $ax^2+bx+1=0$ имеет ровно один корень.

I3.* Уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней и $a+b+c<0$ Найти знак числа c.

I4.**Где может лежать вершина (точка плоскости, соответствующая минимальному значению) квадратного трехчлена x^2+px+q, если один его корень не превосходит I, а другой меньше или равен 2 ?

I5.** Придумать способ, позволяющий, не решая уравнений $x^2+px+q=0$ и $x^2+mx+n=0$, ответить на вопрос: верно ли, что оба уравнения имеют по 2 корня, причем между корнями каждого из них имеется корень другого?

I6. Числа x и y – корни уравнения $t^2+pt+q=0$. Составить уравнение, корнями которого являются (I) x^2, y^2 (2) x/y, y/x. (Коэффициенты нового уравнения должны быть выражены через p и q.)

I7.* Та же задача, но корнями нового уравнения являются $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ (известно заранее, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

I8.* Рассмотрим всевозможные квадратные трехчлены вида $f(x)=x^2+px+q$, для которых $f(1)=3$, $f(3)<1$. Найти множество всех возможных значений таких трехчленов в точке $x=-1$.

I9. При отрезании квадрата со стороной I от прямоугольника, меньшая сторона которого равна I, образуется прямоугольник, подобный исходному, т.е. имеющий то же отношение сторон. Найти стороны исходного прямоугольника. (Он называется прямоугольником "золотого сечения".)

20.** Сколько решений в целых числах имеет уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{666}$?

2I.* Доказать, что если $x+y\in\mathbb{Q}$ и $xy\in\mathbb{Q}$, то $x^n+y^n\in\mathbb{Q}$.

22.* Один из корней квадратного уравнения с рациональными коэффициентами равен $1+\sqrt{2}$. Найти второй корень.

23.* Может ли квадратное уравнение с рациональными коэффициентами иметь корень $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?

24.* Тот же вопрос для $\sqrt[3]{2}$.

25.* При каких a справедливо такое утверждение: для всех x из интервала $]-1, 1[$ выполнено неравенство $x^2+ax+\frac{1}{4}>0$?