Листок 5. Действительные числа: сложение.

Мы сформулируем сейчас несколько основных свойств (аксиом) действительных чисел и операций над ними, принимаемых без доказательства. Все остальные свойства мы будем доказывать, исходя из них.

Аксиомы сложения. Для любых двух чисел x и y определена их сумма, обозначаемая $x+y$. Для каждого числа x определено противоположное число, обозначаемое $-x$. Среди чисел имеется число ноль, обозначаемое 0. Выполнены такие свойства: для всех x, y и z

CI. $x+y=y+x$ (коммутативность)

C2. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (ассоциативность)

C3. $x+0=x$

C4. $x+(-x)=0$

Из этих аксиом можно вывести много разных следствий (теорем).

Пример. Теорема. $((a+b)+c)+d=a+(b+(c+d))$

Доказательство. $((a+b)+c)+d=(a+b)+(c+d)=a+(b+(c+d))$

Первое равенство следует из C2, если $x=a+b$, $y=c$, $z=d$, второе – если $x=a$, $y=b$, $z=c+d$.

Задачи.

I. $0+x=x$

2. $a+(b+c)=b+(a+c)$

3. (Правило сокращения.) Если $a+b=a+c$, то $b=c$.

4. Если $a+x=b$, то $x=(-a)+b$

5. Если $x+y=0$, то $x=-y$

6. $-(-x)=x$

7. $-(x+y)=(-x)+(-y)$

Обозначения. По аксиоме C2 можно писать $x+y+z$, не указывая порядка; по теореме из примера можно писать $x+y+z+u$, также не указывая порядка действий. Аналогично можно писать $a+b+c+d+e$ и т.д. Выражение $a+b-c+d-e$ означает $a+b+(-c)+d+(-e)$ и т.п. Из аксиом можно вывести такое

Правило раскрытия скобок. При раскрытии скобки, перед которой стоит знак – , знаки внутри скобки меняются на противоположные.

8. Обосновать правило раскрытия скобок в таком примере: $a-(b-c)=a-b$

9. Вычислить I-(2-(3-(4-(5-(6-...-(I980-(I98I-I982))...)))))

IO*. Определим новую операцию $\oplus$, положив $a\oplus b=\dfrac{a+b}{1+ab}$ Выполнены ли свойства CI и C2 для такого "сложения"? Выполнено ли свойство $(a\oplus b)\oplus(c\oplus d)=((d\oplus a)\oplus c)\oplus b$?

II*. Придумать другие множества с операцией, обладающие свойствами CI – C4. Например, можно рассматривать числа, не равные нулю и считать "суммой" произведение. Что тогда нужно считать "противоположным" и "нулем", чтобы свойства CI – C4 были выполнены?

I2*. Петя утверждает, что вывел из свойств CI – C4 такое: если $x+x=0$, то $x=0$. Докажите, что его "вывод" содержит ошибку.