Листок 8. Действительные числа: доказательство неравенств.

Доказать, что при всех значениях переменных:

I. $a(a-b) \geqslant b(a-b)$. 2. $a^2 - ab + b^2 \geqslant ab$.

3. если $x > 0$, то $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. 4. если $a+b=1, a,b>0$, то $ab \leqslant \frac{1}{4}$.

5. если $0 \leqslant a \leqslant 1, b \geqslant 1$, то $a + b \geqslant 1 + ab$

6.* $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab + ac + bc$. 7.* если $a+b+c=1$, то $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

8. Доказать, что при любом $x > 0$ выполнено $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ а) при $n = 2$; б) при $n = 3$; в)* при любом натуральном n .

9.* Найти такое k, чтобы а) $(1,001)^k \geqslant 1983$ (Указание. См. задачу 8.); б) $(0.999)^n \leqslant 1/1983$.

I0. $[a]+[b] \leqslant [a+b]$ (напомним, $[x]$ – целая часть x).

II.* Доказать, что если $a \geqslant 1$, $b+c < a+1$, $c \geqslant b$, то $a > b$.

I2. (Неравенство Коши.) (А) Если $a, b > 0$, $ab = 1$, то $a+b \geqslant 2$. (Б)* Если $a, b, c > 0$, $abc = 1$, то $a+b+c \geqslant 3$. (Указание. Переставляя a, b, c можно считать, что $a \leqslant 1$, $b \geqslant 1$. Затем воспользуйтесь (А) и задачей 5.)

I3. Известно, что процент психов среди математиков больше, чем среди нематематиков. Доказать, что процент математиков среди психов больше, чем среди нормальных людей.

I4. Города A и B расположены на реке, $AB = \ell$. Катер, собственная скорость которого равна v, вышел из A вдоль по течению, дошел до B, повернул назад и вернулся в A. Доказать, что время, затраченное им, больше, чем $\frac{2\ell}{v}$ (время, необходимое, если течения нет).

I5. Едет колонна автобусов. Автобус считается переполненным, если в нем едет более 50 пассажиров. Докажите, что процент пассажиров, едущих в переполненных автобусах, не маньше процента переполненных автобусов.

I6. Докажите, что площадь прямоугольника не больше площади квадрата с тем же периметром.

I7.* В трех сосудах налито по I л смеси кислоты с водой. Процентное содержание кислоты в них равно 20%, 40% и 70%. Какое наибольшее количество 50%-го раствора можно составить, смешивая их?

I8.* Найти такое n, чтобы $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 1983$

I9.* Доказать, что при всех n $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1$ (Указание. $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$)

20. Известно, что сумма нескольких чисел равна I. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,00I ?

2I. Придумать десять чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ так, чтобы $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{10}$, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = 1$ и чтобы x_4 было как можно больше. (Докажите, что Ваш способ – наилучший!)

22. Доказать, что функция $x \longmapsto \frac{1+x}{1+2x}$, рассматриваемая на множестве $[0, +\infty[$ – убывающая.