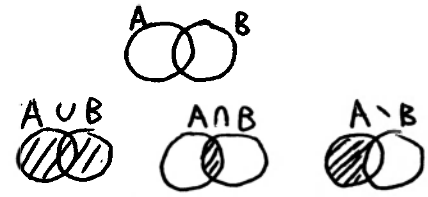
Обозначения. Через $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ обозначаются объединение, пересечение и разность множеств A и B .



$A \subset B$ означает, что любой элемент множества A является элементом множества B . $A = B$ означает, что $A \subset B$ и $B \subset A$.

1°. Какие из следующих утверждений верны для любых A , B , C ? (1) $(A \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$; (2) если $A = B \cup C$, то $A \setminus B = C$; (3) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$; (4) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

2°. Пусть A – множество треугольников, стороны которых удовлетворяют соотношению $c^2 = a^2 + b^2$; B – множество треугольников, у которых угол, противолежащий стороне c , прямой. Верно ли, что $A \subset B$? Верно ли, что $B \subset A$? Какое из этих утверждений называется теоремой Пифагора?

3°. Известно, что всякий рекурсивный ординал конструктивен. Можно ли заключить из этого (не зная ничего более об ординалах), что всякий неконструктивный ординал нерекурсивен? что всякий нерекурсивный ординал неконструктивен?

4°. Контрольная называется легкой, если в каждом варианте каждую задачу решил хотя бы один ученик. Контрольная называется простой, если в каждом варианте есть ученик, который решил все задачи. Может ли легкая контрольная быть не простой? Может ли простая контрольная быть не легкой?

5. Предположим, что: (а) среди людей, имеющих телевизоры, не все являются малярами; (б) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров. Следует ли отсюда, что (в) не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

6°. Последовательность чисел a_1 , a_2 , ... называется <u>ограниченной</u>, если существует такое число C , что $|a_i| \le C$ при всех i . Дать определение неограниченной последовательности, не употребляя слово "не".

7. Обозначим через $|X|$ число элементов множества X .

(а)° Найти $|A \cap B|$, если $|A| = 5$, $|B| = 7$, $|A \cup B| = 10$.

(б)* Найти $|A \cup B \cup C|$, если $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$, $|A \cap B| = p$, $|B \cap C| = q$, $|A \cap C| = r$, $|A \cap B \cap C| = t$.

8. Найти выражение (если такое есть), содержащее буквы A и B и знаки $\cup$, $\cap$, $\setminus$, чтобы при $A = \{0,1,2\}$ и $B = \{0,1,3\}$ оно было равно: (1) $\{2\}$; (2) $\{0,1\}$; (3) $\{2,3\}$; (4) $\{1,3\}$.

9.** Дано 10 множеств. Подсчитаем число k различных множеств, которые можно получить из этих 10 многократным применением операций $\cup$, $\cap$ и $\setminus$ (в любом порядке и количестве). В зависимости от выбора исходных множеств число k может принимать разные значения. Указать все возможные значения k .

Напомним, что функция $f: A \to B$ называется вложением, если $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$, и наложением, если для любого $y \in B$ существует $x \in A$, при котором $f(x) = y$. Функция, являющаяся одновременно вложением и наложением, называется взаимно однозначной.

Пусть $f: A \to B$, $A_1 \subset A$. Назовем образом множества A_1 множество всех элементов вида $f(x)$ при всех $x \in A_1$. Пусть $f: A \to B$, $B_1 \subset B$. Назовем прообразом множества B_1 множество всех тех $x \in A$, для которых $f(x) \in B_1$.

10. Какие из следующих утверждений верны, если $f: A \to B$, $A_1, A_2 \subset A$, $B_1, B_2 \subset B$?

(1) образ $(A_1 \cap A_2)$ = образ $A_1 \cap$ образ A_2;

(2) образ $(A_1 \cup A_2)$ = образ $A_1 \cup$ образ A_2;

(3) прообраз $(B_1 \cap B_2)$ = прообраз $B_1 \cap$ прообраз B_2;

(4) прообраз $(B_1 \cup B_2)$ = прообраз $B_1 \cup$ прообраз B_2;

(5) если f – вложение, то прообраз (образа A_1) = A_1;

(6) если f – наложение, то прообраз (образа A_1) = A_1.

Композицией функций $f: A \to B$ и $g: B \to C$ называется функция $g \circ f: x \mapsto g(f(x))$

11°. Найти композицию $g \circ f$, если: (1) $f: x \mapsto 2x - 3$, $g: x \mapsto 1/(x-1)$; (2) $g: x \mapsto 2x - 3$, $f: x \mapsto 1/(x-1)$; (3) $f: x \mapsto 1/(x-a)$, $g: x \mapsto 1/(x-b)$

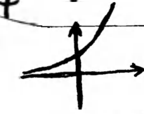
12. Функции вида $x \mapsto ax + b$ называются линейными, вида $x \mapsto ax^2 + bx + c$ – квадратичными, вида $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ – дробно-линейными. Верно ли, что (1) композиция двух линейных функций линейна; (2) двух квадратичных функций – квадратична; (3) двух дробно-линейных функций – дробно-линейна?

13. Пусть $g(x) = ax + b$ и $f(x) = 2x + 1$. При каких a и b функции f и g коммутируют, то есть $f \circ g = g \circ f$?

14. Тот же вопрос, что в 13, если $f(x) = x^2$, $g(x) = ax + b$.

Если $f: A \to B$ – взаимно однозначная функция, то имеется единственная обратная функция $g: B \to A$, для которой $g(f(x)) = x$ при всех $x \in A$ и $f(g(y)) = y$ при всех $y \in B$. Она обозначается f^{-1}.

15. (а)° Пусть $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \mid x > 0\}$, график f изображен на рисунке. Построить график f^{-1}.



(б) Пусть $f: A \to B$, $g: B \to A$, $g(f(x)) = x$ при всех $x \in A$. Можно ли утверждать, что f взаимно однозначна и $g = f^{-1}$?

16**. Найти 10 различных дробно-линейных функций f, для которых $f(f(x)) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме конечного числа.

№ 17*. Если функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ взаимно однозначна и $f \neq id$ (через id обозначается тождественная функция, для которой $id(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{N}$), то найдется такое n, что $f(n) < n$.

18*. Пусть $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ – взаимно однозначная функция. Доказать, что для любых рациональных p и q, для которых $p < q$, найдется такое рациональное $x \in]p,q[$, что $f(x) > 1983$

19.** Доказать, что любая функция $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ может быть представлена в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где f_1, f_2 и f_3 - взаимно однозначные функции из $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{Q}$.

20.** Существует ли взаимно однозначная функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой $f(2x+1) = 3f(x)+1$ при всех $x \in \mathbb{N}$?

21. Пусть A, B - числовые множества. Говорят, что функция $f: A \to B$ строго возрастает, если $f(x') > f(x)$ при $x' > x$. Существует ли взаимно однозначная ~~строго~~ возрастающая функция $f: A \to B$, если: (а)* $A = \mathbb{R}$, $B = [0,1]$; (б)* $A = \mathbb{Q}$, $B =]0,1[\cap \mathbb{Q}$; (в)** $A = \mathbb{Q}$, B = множество всех чисел, разлагающихся в конечную десятичную дробь, т.е. чисел вида $m/10^k$, где $m \in \mathbb{Z}$.

22.** На плоскости нарисовано бесконечное число точек; некоторые пары точек соединены линиями. Доказать, что либо существует бесконечное множество точек, любые два элемента которого соединены линией, либо существует бесконечное множество точек, никакие два элемента которого не соединены линией.

23.** Все конечные последовательности 0 и I разбиты на 2 класса. Доказать, что любую бесконечную последовательность 0 и I можно разрезать на такие куски, что все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежат одному классу.

24.* Доказать, что из II любых бесконечных десятичных дробей можно выбрать две такие, которые совпадают в бесконечном числе разрядов.

25.* Пусть X - конечное множество, $f: X \to X$. Доказать, что существует такое n, что $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n раз) имеет неподвижную точку (такую точку x, что $f \circ f \circ \ldots \circ f(x) = x$).

26.* Если f - взаимно однозначное отображение конечного множества, то найдется такое n, что $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} = id$

27.* Найти все: а) линейные б) возрастающие функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых $f \circ f(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

28.** Найти все дробно-линейные функции f (т.е. функции вида $x \longmapsto (ax+b)/(cx+d)$), для которых $f(f(x)) = x$ для всех x, кроме конечного числа.

29.** Придумать два бесконечных множества натуральных чисел A и B так, чтобы любое натуральное число представлялось единственным образом в виде суммы $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

30.** Доказать, что всякое отображение $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, для которого $f(x+y) = f(x) + f(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{Q}$ имеет вид $x \longmapsto \alpha x$ при некотором $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Равномощность множеств.

Определение. Множества A и B равномощны, если существует взаимно однозначная функция $f: A \to B$. Множество A счетно, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$.

1°. Доказать равномощность интервала $]0,1[$ и прямой $\mathbb{R}$.

2°. Доказать равномощность интервала $]0,1[$ и отрезка $[0,1]$. (Если эта задача окажется трудной, см. ниже задачу № 9)

3°. Доказать счетность множества $\mathbb{Z}$ целых чисел и множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

4°. Доказать счетность множества всех конечных последовательностей натуральных чисел.

5. Доказать равномощность множества A_{01} всех бесконечных последовательностей 0 и 1 и множества A_{0123} всех последовательностей из 0,1,2,3.

Как говорят, отношение "быть равномощными" является отношением эквивалентности. Это означает, что оно рефлексивно (каждое множество равномощно самому себе), симметрично (если A равномощно B, то B равномощно A) и транзитивно (если A равномощно B, B равномощно C, то A равномощно C).

6. (а)° Объединение двух счетных множеств счетно. (б)° Объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ счетного числа счетных множеств A_i счетно.

7°. Бесконечное подмножество счетного множества счетно.

8°. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

9°. Доказать, что если A бесконечно, а B конечно или счетно, то $A \cup B$ равномощно A. (Указание. Использовать 8.)

10°. Доказать, что множества $[0,1]$ и $[0,1] \cup [2,3]$ равномощны.

11. Доказать, что если A и B счетны, то множество $A \times B$, состоящее из всех пар $\langle a, b \rangle$ с $a \in A$, $b \in B$, счетно.

12. Доказать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.

13*. Имеется некоторое множество непересекающихся интервалов, вложенных в отрезок $[0,1]$. Доказать, что оно конечно или счетно.

Счетные множества являются "наименьшими" среди бесконечных множеств. Следующая задача показывает, что далеко не все бесконечные множества счетны.

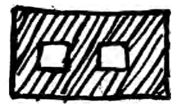
14*. Доказать, что множество A_{01} всех бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно. (Указание. (Желающие решать задачу сами не должны его читать!) Пусть это множество счетно и мы занумеровали все последовательности 0 и 1: первая, вторая,... Как теперь построить последовательность, которую мы пропустили? Постройте последовательность, которая отличается от i-ой на i-ом месте.)

Множества, равномощные множеству всех бесконечных последовательностей 0 и I, называются множествами мощности континуума.

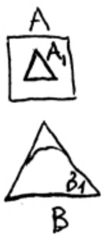
I5.* Доказать, что множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ имеет мощность континуума.

I6.* Доказать, что множество $A_{01} \times A_{01}$ имеет мощность континуума.

I7.* Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей 0,I,2 имеет мощность континуума.

I8.* Доказать, что множества  и  равномощны.

При решении задач I7 и I8, так же как и в некоторых следующих задачах, может оказаться полезной такая



Теорема (Кантор, Бернштейн) Пусть A и B – два множества. Если A равномощно некоторому подмножеству B_I множества B, а B равномощно некоторому подмножеству A_I множества A, то множества A и B равномощны.

Эта теорема довольно трудная. Ей разрешается пользоваться без доказательства. См. также задачу 26.

I9.** Доказать, что $[0,1]$ имеет мощность континуума. (Принять без доказательства, что каждое действительное число от 0 до 1 однозначно задается бесконечной десятичной дробью, не имеющей 9 в периоде.)

20.** Доказать, что квадрат (внутренность $\cup$ граница) имеет мощность континуума.

2I.* Доказать, что если X и Y имеют мощность континуума, то множества $X \cup Y$ и $X \times Y$ имеют мощность континуума.

22.* Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуума.

23.** Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуума.

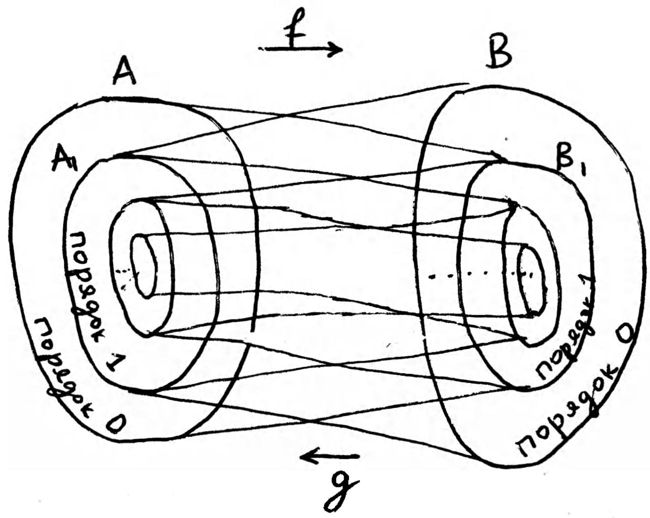
24.** Доказать, что если квадрат представлен в виде объединения двух множеств X и Y, то хотя бы одно из них имеет мощность континуума.

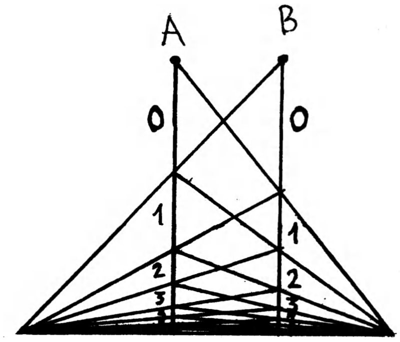
Следующая теорема показывает, что для любого множества A можно построить множество "большей" мощности (смысл слова "больше" мы пока не уточняем).

25.** Теорема Кантора. Докажите, что множество A и множество $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств множества A не равномощны, каково бы ни было множество A. (Указание. Пусть f – вложение A в $\mathcal{P}(A)$; покажите, что f – не наложение, рассмотрев множество $\{x \mid x \notin f(x)\}$.)

Частным случаем этой теоремы является утверждение задачи I4. (Почему?

26.** Докажите теорему Кантора – Бернштейна. Указание. Пусть $f: A \to B_1 \subset B$ и $g: B \to A_1 \subset A$ – взаимно однозначные функции. Пусть $x \in A$. Определим последовательность x_0, x_1, ... положив $x_0 = x$, $x_1 =$ прообраз x_0 при отображении g, $x_2 =$ прообраз x_1 при отображении f, $x_3 =$ прообраз x_2 при отображении g и т.д. Если построение оборвется на n -ом шаге, то есть если x_{n+1} построить не удастся, будем называть n порядком элемента x. Если построение будет продолжаться неограниченно долго, то назовем x элементом бесконечного порядка. Пусть $A_{чет}$, $A_{неч}$ и $A_{бес}$ – множества элементов четного, нечетного и бесконечного порядков (соответственно) в A, а $B_{чет}$, $B_{неч}$ и $B_{бес}$ – аналогичным образом определенные подмножества в B. Докажите, что f устанавливает взаимно однозначное соответствие между $A_{чет}$ и $B_{неч}$, g – между $B_{чет}$ и $A_{неч}$, и любая из функций f и g – между $A_{бес}$ и $B_{бес}$. Выведите отсюда утверждение теоремы Кантора – Бернштейна.





27.** Назовем восьмеркой объединение двух касающихся (внешним образом) окружностей. Пусть на плоскости задано множество восьмерок, никакие две из которых не пересекаются. Доказать, что это множество конечно или счетно.

28.** Имеется счетное множество A и некоторое семейство подмножеств этого множества. Может ли оно быть несчетным, если:

(а) любые два элемента семейства имеют конечное пересечение;

(б) для любых двух элементов X, Y семейства $X \subset Y$ или $Y \subset X$;

(в) для любых двух элементов X, Y семейства множество $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ конечно ?

29.** Доказать, что множество всех функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ несчетно и не имеет мощности континуума.

Ц е л ы е   ч и с л а

I. Делимость.

Напоминания. (Буквы a, b... обозначают целые числа.) Говорят, что a <u>делится на</u> b, если существует такое c, что $a=b\cdot c$. Вместо " a делится на b " говорят также " a <u>кратно</u> b ", " b <u>делит</u> a ", " b – <u>делитель</u> a ". Пишут так: $a \vdots b$ (читается: a делится на b) и $a \not\vdots\, b$ (a не делится на b).

Верны ли такие утверждения (задачи I – 2):

I. (а) Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $a+b \vdots c$ и $a-b \vdots c$. (б) Если $a \not\vdots\, c$ и $b \not\vdots\, c$, то $a+b \not\vdots\, c$. (в) Если $a \not\vdots\, c$ и $b \vdots c$, то $a+b \not\vdots\, c$. (г) Если $ab \vdots c$, то $a \vdots c$ или $b \vdots c$.

2. (а) Если $a \vdots$ I5, $b \vdots$ 2I, то $ab \vdots$ 3I5 (=I5·2I). (б) если $a \vdots$ I5, $a \vdots$ 2I, то $a \vdots$ 3I5.

Докажите (задачи 3 – 6), что

3. Если $a^2 \vdots (a+b)$, то $b^2 \vdots (a+b)$ (Указание. $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$.)

4. При любом n число $n(n+1)$ четно (=делится на 2).

5. При любых a и b число a^3+b^3 делится на $a+b$.

6*. При любых n число $7^{2n}-4^{2n}$ делится на 33.

7*. Число a четно и не делится на 4. Доказать, что количество четных делителей числа a равно количеству нечетных делителей числа a (Указание: установить взаимно-однозначное соответствие между чётными и нечётными делителями

2. Остатки.

Напоминания. Пусть a, b – любые (целые) числа, $b>0$. Число a можно разделить с остатком на b, то есть представить в виде $a = k\cdot b + r$, где $0 \le r < b$. Такое представление единственно. Здесь k называется <u>неполным частным</u>, r – <u>остатком</u>.

Пример. Числа 25 и –5 дают при делении на 6 остаток I.

I. Нарисовать все числа от – 20 до 20, дающие остаток 2 при делении на 7.

2. Найти остаток от деления числа (– I50) на I9.

3. При делении I00 на a получили остаток 6. [redacted] a? (Дать обоснованный ответ.) Чему может быть рав

4. Доказать, что (остатки от деления a и b на c равны) $\Leftrightarrow (a-b \vdots c)$

5. Доказать, что числа n и $100n$ дают одинаковые остатки при делении на II.

6. (а) Число a дает при делении на 5 остаток 2, число b – остаток 4. Какие остатки дают (при делении на 5) числа $a+b$ и $a\cdot b$ (ответ и обоснование)?

(б) Заполнить таблицы, указывающие остатки от деления на 5 чисел $a+b$ и $a\cdot b$ (остатки от деления a и b указаны по горизонтали и вертикали).

$b \backslash a$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Целые числа – 2

Остатки (продолжение)

(в) Какие остатки могут давать точные квадраты при делении на 5 ? (г)[*] Доказать, что a^5 и a дают одинаковые остатки при делении на 5. (д) Пользуясь таблицей, докажите, что если $ab \vdots 5$, то $a \vdots 5$ или $b \vdots 5$.

Задача 6 показывает, что для нахождения остатков от деления $a+b$ и $a \cdot b$ на 5 не нужно знать сами a и b : достаточно знать их остатки. (Разумеется, 5 можно заменить на любое число.)

7. Доказать, что любое натуральное число дает такой же остаток при делении на 9, как и сумма его цифр. Вывести отсюда признаки делимости на 9 и на 3.

8. Найти остаток от деления $3n^2+8n+5$ на n при n = I, 2, 3, 4,...

9. Найти остаток (а) от деления 3^{100} на 7; (б) от деления 8^{100} на 7.

10. Было 7 кусков бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 кусков. После этого некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 7 кусков и так сделали несколько раз. Могло ли получиться 1983 куска?

11. Какой остаток дает число n^2+3n+5 при делении на $n+1$ при n = 0, I, 2, 3,...?

12. Доказать, что из любых 8 целых чисел можно выбрать 2 таких, что их разность делится на 7.

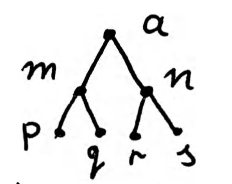
13. (а) Верно ли, что из любых 100 чисел можно выбрать 15 таких, что разность любых двух из выбранных делится на 7 ? (б) Тот же вопрос для 16 чисел вместо 15. (в) Верно ли, что из 100 чисел всегда можно выбрать 2 таких, у которых сумма делится на 7 ?

14. Может ли число делиться на 8, а при делении на 12 давать остаток 10 ?

15.[*] Даны 1982 числа. Доказать, что можно выбрать несколько из них так, чтобы сумма выбранных делилась на 1982.

3. Простые числа.

Напоминания. Положительное число p называется простым, если у него нет делителей, кроме ± 1 и $\pm p$ и $p \neq 1$ (Таким образом, I не считается простым числом.) Число, не являющееся простым и не равное I, называется составным. Всякое положительное число можно разложить в произведение простых: если a не простое, то a имеет делитель m, т.е. $a = m \cdot n$; можно считать $m, n > 0$; если



m и n уже простые, то все доказано, если нет, то разложим их дальше и т.д. (Процесс кончится, так как числа уменьшаются!) Как мы докажем впоследствии (п. 6), разложение на простые множители однозначно (любые два разложения одного и того же числа отличаются лишь порядком сомножителей).

I. Найти все простые p, при которых $p+1$ – простое.

2. Петя придумал новую теорему: при всех $n \geqslant 0$ число n^2+n+41 простое. Верна ли его теорема?

3. (а) Найти все простые p, для которых $p+2$ и $p+4$ тоже простые. (б)* Найти все простые p, для которых $p+2$ – простое.

4. Найти все простые p, для которых $p+1$ – точный квадрат.

5. Докажите, что четырехзначное число, не имеющее (одно- и) двузначных делителей, кроме ± 1, простое.

6. (а) Докажите, что числа I00!+2, I00!+3,..., I00!+I00 составные. (I00! = I·2·...·I00). (б) Докажите, что для всякого N имеется N подряд идущих составных чисел.

7*. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть простое число или I.

8. (а) Постройте число, которое дает остаток I при делении на любое из чисел от 2 до I00. (б) (Евклид) Докажите, что простых чисел бесконечно много. (Указание. Пусть все простые числа меньше N. Рассмотрите число, дающее остаток I при делении на все числа от 2 до N и получите противоречие.)

4. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа.

Пусть a, b – целые числа. Число d называется общим делителем чисел a и b, если $a \vdots d$, $b \vdots d$. Наибольшее из таких d обозначается НОД(a , b) и называется наибольшим общим делителем чисел a и b. (Если $a = b = 0$, то все числа являются общими делителями a и b и НОД(a , b) не определен.) Числа a и b называются взаимно простыми, если НОД(a , b) = I (т.е. если у a и b нет общих делителей, кроме ± 1).

I. Докажите, что если НОД(a , b) = d, то числа a/d и b/d целые и взаимно просты.

2. Чему равен НОД(a , b), если $a \vdots b$?

3. На числовую ось нанесите точки x, для которых НОД$(x, 12)=2$.

4. Какое наибольшее количество одинаковых букетов можно составить из (а) 24 белых и 40 красных георгинов; (б) m белых и n красных георгинов?

5. Докажите, что (а) числа n и $n+1$; (б) числа $n+1$ и $2n+3$ взаимно просты. (Указание. $2n+3 = 2(n+1)+1$.)

6. Доказать, что НОД(a , b) = НОД($a-b$, b).

7. Доказать, что если $1982a = 1983b + 1$, то a и b взаимно просты.

8*. Доказать, что любые два числа в последовательности $2 + 1,\ 2^2 + 1,\ 2^4 + 1,\ 2^8 + 1,\ 2^{16} + 1, \ldots$ взаимно просты. (Указание. $(2^8 - 1) = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)$.)

5. Алгоритм Евклида.

Основная лемма. Пусть $a, b > 0$, a дает при делении на b остаток r. Тогда НОД(a, b) = НОД(b, r).

Набросок доказательства. Достаточно доказать, что любой общий делитель пары (a, b) является общим делителем пары (b, r) и наоборот. В самом деле, если $a = bq + r$, $a \vdots d$, $b \vdots d$, то $r = a - bq \vdots d$. Обратно, если $r \vdots d$, $b \vdots d$, то $a = bq + r \vdots d$.

Алгоритм Евклида. Будем называть преобразованием Евклида переход от пары (a, b) с $a > b > 0$ к паре (b, r), где r – остаток от деления a на b. Согласно Основной лемме, преобразование Евклида не меняет наибольшего общего делителя. Поэтому при поисках НОД(a, b) можно использовать преобразование Евклида и искать НОД получившейся пары.

Пример. $(42,30) \longrightarrow (30,12)$ (остаток от деления 42 на 30 равен 12)
$(30,12) \longrightarrow (12,6)$ (остаток от деления 30 на 12 равен 6)
$(12,6) \longrightarrow (6,0)$ (остаток от деления 12 на 6 равен 0)

Поэтому НОД(42,30) = НОД(30,12) = НОД(12,6) = НОД(6,0) = 6.

1. Найти НОД(525,231).

2. Над прямоугольником со сторонами a и b, $a > b$, разрешается делать такую операцию: отрезать квадрат со стороной b. (а) На какие квадраты будет разрезан прямоугольник $141 \cdot 324$ в результате многократного применения этой операции? (б) Доказать, что любой прямоугольник с целыми сторонами будет в конце концов разрезан на квадраты, и найти сторону наименьшего из них. (в)* Верно ли, что любой прямоугольник (не обязательно с целыми сторонами) будет в конце концов разрезан на квадраты?

3. Имеются две большие бочки с водой и две банки на 210 г и 370 г воды. Разрешается наполнять банку в одной бочке и выливать в другую. Используя результаты применения алгоритма Евклида ($(370, 210) \to (210,160) \to (160,50) \to (50,10)$), придумать способ перелить из первой бочки во вторую 160 г, 50г, 10 г. Можно ли с помощью наших банок перелить 75 г ?

4. Блоха прыгает по прямой, совершая короткие прыжки (21 см) и длинные (37 см). Используя алгоритм Евклида, найдите способы, позволяющие блохе сдвинуться на 16 см, 5 см и 1 см.

5. При дележе добычи два фальшивомонетчика, печатавшие бумажки по 2I руб. и 37 руб., решили, что один из них должен другому I руб. Как им рассчитаться, если у обоих есть только напечатанные ими деньги ?

6. Теоретические следствия алгоритма Евклида. Основная теорема арифметики.

I. Пусть $a, b > 0$, d – общий делитель чисел a и b. (а) Докажите, что все числа, получающиеся при применении алгоритма Евклида к паре (a , b), делятся на d. (б) Докажите, что НОД(a, b) делится на d. Из доказанного вытекает такая

Теорема I. Наибольший общий делитель делится на любой другой общий делитель.

2. Пусть $a, b > 0$. Назовем число c хорошим, если можно найти такие целые x и y, что $c = xa + yb$. Таким образом, c хорошее, если
- ковшами в a литров и b литров можно перелить из одной бочки в другую c литров;
- блоха, делающая прыжки в a метров и b метров, может сдвинуться на c метров;
- человек, имеющий только купюры в a рублей и b рублей, может уплатить c рублей другому, у которого имеются такие же купюры.

Докажите, что (I) Числа a и b хорошие; (2) все числа, встречающиеся при применении алгоритма Евклида к (a , b), хорошие; (3) НОД(a,b) – хорошее; (4) все числа, кратные НОД(a , b) – хорошие; (5) всякое хорошее число кратно НОД(a , b). Таким образом, верна

Теорема 2. (Существуют x и y, для которых $c = xa + yb$) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (c кратно НОД(a , b)).

Следствие. Если a и b взаимно просты, то существуют x и y, для которых $xa + yb = 1$

3. Докажите, что если $ab \vdots c$ и a взаимно просто с c, то $b \vdots c$, используя следствие из теоремы 2. (Указание. $b = b \cdot 1$; представьте I в виде суммы, пользуясь взаимной простотой a и c .)

4. Докажите, пользуясь утверждением задачи 3, что (а) если $ab \vdots p$ p – простое, то $a \vdots p$ или $b \vdots p$. (б) если $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \vdots p$ p – простое, то $a_i \vdots p$ при некотором i .

5. Докажите единственность разложения на простые множители: если $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_m$, то списки $p_1 \ldots p_n$ и $q_1, \ldots, q_m$ состоят из одних и тех же чисел в одинаковом количестве и отличаются лишь порядком. (Указание. Если это не так, то после сокращения всего общего в $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_m$ мы придем к противоречию с утверждением задачи 4.)

Утверждение о существовании и единственности разложения на множители называется "Основной теоремой арифметики". Оно используется в задачах 6 - 9.

6. Доказать, используя утверждение задачи 5, что если $a \vdots b$, $a \vdots c$, b и c взаимно просты, то $a \vdots bc$.

7.* Известно, что $x^m = y^n$, НОД(m, n) = I. Докажите, что существует такое z, что $x = z^n$, $y = z^m$.

8.* Докажите, что произведение наибольшего общего делителя чисел a и b и наименьшего положительного общего кратного этих же чисел равно $|ab|$.

9.* Докажите, что (а) если p - простое число, то не существует таких (целых) m и n, что $(m/n)^2 = p$; (б) если a - целое число, не являющееся точным квадратом, то не существует таких m и n, что $(m/n)^2 = a$.

7.* Идеалы.

В этом разделе даются другие доказательства теорем I, 2.

Определение. Множество $I \subset \mathbb{Z}$ называется идеалом, если выполнены такие свойства: (ИI) $x, y \in I \Rightarrow x+y,\ x-y \in I$

(И2) $x \in I$, n - любое целое число $\Rightarrow nx \in I$.

Примеры идеалов: $\{0\}$, $\mathbb{Z}$, множество четных чисел.

I. Докажите, что если I и J - идеалы, то $I \cap J$ и $I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$ - идеалы.

2. Докажите, что для любого идеала I найдется такое число c, что I = (множество всех кратных числа c). Такое c называется образующей идеала I.

3. Пусть $I = \{x \mid x \vdots a \text{ и } x \vdots b\}$. Докажите, что I - идеал. Пусть c - его образующая. Докажите, что (I) c - общее кратное a и b; (2) если c' - любое общее кратное a и b, то c' кратно c. Таким образом, $|c|$ есть наименьшее общее кратное. Мы получаем также, что

Любое общее кратное двух чисел делится на их наименьшее общее кратное.

4. Пусть $I = \{xa + yb \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Докажите, что I - идеал. Пусть d - его образующая. Докажите, что (I) d - общий делитель a и b; (2) если d' - любой общий делитель a и b то $d \vdots d'$. (Таким образом, мы получаем, что $|d|$ = НОД(a, b). Выведите отсюда утверждения теорем I и 2 раздела 6.

5. Пусть $ab \vdots c$ и a взаимно просто с c. Докажите, что $b \vdots c$, рассмотрев идеал $\{x \mid xb \vdots c\}$, установив, что он содержит a и c и что его образующая равна I. (Тем самым получено новое решение задачи 3 раздела 6.)

8. Решение уравнений в целых числах.

I. Пользуясь утверждением задачи 3 раздела 6, найдите все целочисленные точки (точки, обе координаты которых целые) на прямой $ax = by$, если (а) $НОД(a,b) = 1$; (б) $НОД(a,b) = d$.

2. Докажите, что если $c \not\vdots НОД(a,b)$, то на прямой $ax+by=c$ нет целочисленных точек, а если $c \vdots НОД(a,b)$, то они есть.

Задача 2 позволяет определить, имеет ли уравнение $ax+by=c$ целочисленные решения. Следующая задача показывает, как их найти. Можно считать, что НОД(a , b) = I (если нет, сократим все члены уравнения на НОД(a , b)).

3. Пусть НОД(a , b) = I. Тогда уравнение $ax+by=c$ имеет бесконечно много целочисленных решений; если x_0, y_0 – одно из них, то все другие можно найти по формулам $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$ (Докажите.)

4. Найти все решения уравнения $21x - 37y = 1$ (Указание. См. предыдущую задачу и задачи 3 – 5 из раздела 5.)

5. Найти все решения уравнения $21x - 37y = 1982$

6*. Найти все решения уравнений: (а) $105x + 42y = 56$; (б) $-70x + 408y = 34$.

7*. Имеются контейнеры весом I30 кг и I60 кг. Нужно полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью в 3 тонны. Как это можно сделать (указать все решения)?

8*. Найти общую формулу для чисел, дающих остаток 7 при делении на I5 и остаток I2 при делении на 25.

9*. Отметим на числовой прямой точки, дающии при делении на I2 остаток 5, синим карандашом, а точки, дающии при делении на I8 остаток I3 – красным. Каково будет наменьшее расстояние между красной и синей точками?

9*. Разные задачи.

I. Докажите, что если числа a , b , c не имеют общего (не равного ± 1), делителя (т.е. числа, на которое все они делятся), то существуют такие x, y, z, что $xa + yb + zc = 1$.

2. Доказать, что НОД(2^m – I, 2^n – I) = $2^{НОД(m,n)}$ – I.

3. (Китайская теорема об остатках.) Пусть $a_1, \dots, a_n$ – попарно взаимно простые положительные числа, $0 \le r_1 < a_1, \dots, 0 \le r_n < a_n$. Доказать, что существует число A , дающее при делении на a_1 остаток r_1 , при делении на a_2 остаток r_2 и т.д.

4. Пусть применение алгоритма Евклида к паре (a , b) (с $a>b$) продолжается n шагов (последним считается тот, в котором остаток равен нулю). Доказать, что a не меньше n-го члена последовательности Фибоначчи 2,3,5,8,I3... (каждый член равен сумме двух предыдущих).

5. Имеется 35 целых чисел. Разрешается одновременно прибавить к любым 23 из них по I. Доказать, что, повторяя эту операцию, можно сделать все числа равными.

6. (Малая теорема Ферма.) Пусть p - простое число, $a \not\vdots p$. Доказать, что $a^{p-1} - 1 \vdots p$

7. Назовем положительное целое число хорошим, если оно есть сум а двух точных квадратов. (Например, $5 = 2^2+1^2$ и $9 = 3^2+0^2$ - хорошие, а 7 - нет.) Докажите, что (а) произведение двух хороших чисел - хорошее; (б) простые числа, дающие остаток 3 при делении на 4 - не хорошие; (в) простые числа, дающие остаток I при делении на 4 - хорошие.

8. Найти все "пифагоровы тройки", то есть все тройки целых чисел x, y и z, для которых $x^2 + y^2 = z^2$.

9. Доказать, что произведение любых n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.

10. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел, дающих остаток (а) 3 ; (б) I при делении на 4.

Целые числа: еще несколько задач.

1 I.В треугольнике каждое число равно сумме трех стоящих над ним. Доказать, что в каждой строке, начиная с третьей, есть четное число.

```
      I
    I I I
  I 2 3 2 I
I 3 6 7 6 3 I
```

1/3 2. а) Доказать, что при всяком целом К число $K^7 - K$ делится на 7.
б) Доказать, что при всяком целом К и простом р число $K^p - K$ делится на р

2 3. Доказать, что число I + I/2 + I/3 +...+ I/К не является целым ни при каком натуральном К.

1 4. Доказать, что если Р – простое число, большее 3, то число P^2 дает при делении на 24 остаток I.

4 5. Доказать, что если $A_I, \ldots, A_P$ – целые числа, то произведение всех дробей вида $(A_K - A_M)/(K-M)$ – целое число. (В произведение входят дроби при всех К,М, при которых $I \leqslant M < K \leqslant P$.)

2 6. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с единицей всегда дает точный квадрат.

3 7. Имеется IOI целое положительное число, все они не больше 200. Доказать, что среди них можно выбрать два числа, одно из которых делится на второе.

3 8. Шахматист играет не менее одной партии в день и не более двенадцати в неделю. Доказать, что можно найти несколько таких дней, идущих подряд, за которые он сыграет ровно 20 партий.

3 9. Доказать, что $t_1 + \ldots + t_n = [\frac{n}{1}] + \ldots + [\frac{n}{n}]$
где t_i – число делителей целого числа i , а $[A]$ – целая часть A .

3 IO. Обозначим через (А) ближайшее к А целое число (если их два, то берем большее). Доказать, что если N – натуральное число, то

$$N = (\frac{N}{2}) + (\frac{N}{4}) + (\frac{N}{8}) + \ldots$$

(сумма продолжается, пока не кончатся ненулевые слагаемые).

II. Найти четырехзначное число вида $\overline{AABB}$, являющееся точным квадратом.

1/3 I2. Найти все пары целых чисел x , y , для которых:
а) $xy = x + y$; б) $1/x + 1/y = 1/14$

2 I3. Числа А и В целые, причем $A^2+B^2 \vdots 2I$. Доказать, что $A^2 + B^2 \vdots 44I$ $(= 2I^2)$.

2 I4. Числа p и q простые. Сколько существует натуральных чисел от I до pq , взаимно простых с pq ?

3 I5. Доказать, что $n! \not\vdots\, 2^n$ при $n > 2$.

2 I6. Доказать, что существует число вида III...III, делящееся на I983.

2 I7. Пронумеруем подряд все простые числа, начиная с числа 5 (считая его первым). Доказать, что каждое число будет больше своего утроенного номера.

3 I8. Доказать, что любое рациональное число между 0 и I можно представить как сумму обратных величин различных целых чисел.

2 I9. Числа P и $2P + I$ – простые, P больше 3. Доказать, что число $3P + I$ – составное.

1 20. Доказать, что уравнение $AX + BУ = AB$ не имеет решений в целых положительных числах, если A и B – взаимно простые целые положительные числа.

3 2I. Доказать, что среди I6 последовательных натуральных чисел всегда есть число, взаимно простое с остальными, а среди I7 – не всегда.

1 22. Доказать, что если между цифрами числа I33I вставить по равному количеству нулей, то получится точный куб.

2 23. Доказать, что выражения $2X + 3У$ и $9X + 5У$ делятся на I7 при одних и тех же целых числах X и $У$.

1 24. Найти все натуральные числа K, при которых число $2^K + I$ делится на 3.

1 25. Доказать, что если A и B – положительные целые числа, то число членов последовательности $A, 2A, 3A, \ldots, BA$, делящихся на B, равно НОД(A,B).

1 26. Доказать, что при любом натуральном K число $5^K + 2\cdot 3^{K-I} + I$ делится на 8.

5 27. По кругу написано 2^K целых чисел. С ними многократно проделывают такую операцию: между каждыми двумя числами пишут их сумму, а исходные числа стирают. Доказать, что через некоторое время останутся только четные числа. (Рассмотрите сначала малые значения $к$.)

I 2 3 4	3 4 6 7	7 9 II I3	I6 I8 22 24	← к=2 Пример к задаче 27

4 28. В ряд выписаны 2^K натуральных чисел. Известно, что если выписать все простые множители этих чисел, то среди них будет не более K различных. Доказать, что из данного ряда можно выбрать несколько стоящих подряд чисел так, чтобы их произведение было точным квадратом.

2 29. При каких K число $(K - I)!$ не делится на K ?

3 30. Пусть a, b, c, d – такие целые числа, что система уравнений $ax + by = p$, $cx + dy = q$ при всех p и q имеет целочисленные решения. Доказать, что $|ad - bc| = 1$.

1 3I. Разобьем числа I,2,3,4,5 любым способом на две группы. Доказать, что в одной из двух групп всегда можно найти два числа, разность которых будет совпадать с одним из чисел той же группы.

1 32. Сумма цифр натурального числа не меняется при умножении числа на 5. Доказать, что число делится на 9.

1 33. Число III...III (A единиц) делится на число III...III (B единиц). Доказать, что A делится на B.

Корень.

Мы принимаем такую аксиому:

(KI) Для всякого натурального $n>0$ и всякого неотрицательного a существует неотрицательное x, для которого $x^n = a$.

I*. Докажите, что (KI) не следует из других известных Вам аксиом действительных чисел.

2. Докажите, что при любом натуральном $n>0$ и неотрицательном a число x, для которого $x \geq 0$ и $x^n = a$, единственно.

3. Докажите, что если натуральное число n нечетно, то при любом (в том числе отрицательном) a существует и единственно x, для которого $x^n = a$.

Обозначение. Через $\sqrt[n]{a}$ обозначается: а) при нечетном n и любом a – то единственное x, для которого $x^n = a$ (см. задачу 3) б) при четном n и неотрицательном a – то единственное x, для которого $x \geq 0$ и $x^n = a$ (см. задачу 2). Например, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[2]{4} = 2$ (но не -2!), $\sqrt[2]{-4}$ не определено.

4. Доказать, что при любых $a, b \geq 0$ и любых натуральных $m, n > 0$ справедливы равенства $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$.

5. В чем ошибка: $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

6. Построить график функции $x \longmapsto \sqrt{x^2} + \sqrt[3]{x^3}$.

7. Преобразуйте $1/(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ к виду $a\sqrt{b} + c\sqrt{d} + \ldots$, где $a, b, c, d, \ldots \in \mathbb{Q}$. (Указание. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \ldots$)

8*. Та же задача для $1/(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$,

9. Найдите сумму $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1982}+\sqrt{1983}}$.

I0. Упростить: $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[6]{81}$.

II*. Упростить: $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

I2*. Упростить: $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$

I3. Доказать иррациональность $\sqrt[3]{2}$

I4. То же для $\sqrt{6}$

I5. То же для $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

I6. То же для $\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$ (1983 корня)

I7**. Пусть x – корень уравнения $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами $a_{n-1}, \ldots, a_0$, причем x рационален. Доказать, что x – целое число. Вывести отсюда утверждения I3, I4.

I8*. Вывести из I7, что если $a, n \in \mathbb{N}$ и $\sqrt[n]{a}$ рационально, то $\sqrt[n]{a}$ – целое.

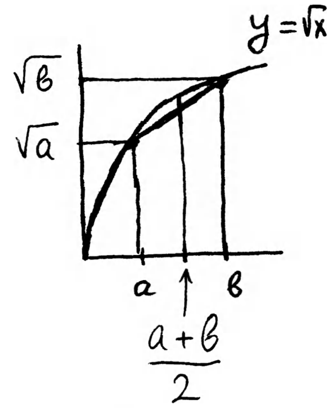
I9*. Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ иррационально.

20**. (Обобщение задачи I9). Доказать, что если $p_1, \ldots, p_n$ – различные простые числа, а $q_1, \ldots, q_n$ – рациональные числа, не все из которых равны 0, то $q_1\sqrt{p_1} + \ldots + q_n\sqrt{p_n}$ иррационально.

2I**. Доказать, что если $x, y, z, \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \in \mathbb{Q}$, то $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z} \in \mathbb{Q}$

22. Доказать, что при любом $n \geq 1$ функция $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ строго возрастает: если $x < y$, то $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.

23. Доказать, что если $m > n$, $x > 1$, то $\sqrt[m]{x} < \sqrt[n]{x}$.



24. Что больше $\sqrt{5}$ или $\sqrt[3]{11}$?

25*. Что больше: $\sqrt{3}+\sqrt{11}$ или $\sqrt{5}+\sqrt{8}$?

26. Доказать, что $\sqrt{(a+b)/2} \le (\sqrt{a}+\sqrt{b})/2$
Указать на рисунке разность правой и левой частей.

27. Доказать, что

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(1/a+1/b)} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

(Эти величины называются гармоническим, геометрическим, арифметическим и квадратичным средними чисел a и b .)

28**. Неравенство Коши о среднем арифметическом и геометрическом.

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \le (a_1+\ldots+a_n)/n$$

(Указание. См. задачу I2 листка "Доказательство неравенств")

29*. Сумма n положительных чисел равна a . Какое наибольшее значение может принять их произведение?

30*. Произведение n положительных чисел равно a . Какое наименьшее значение может принять их сумма?

В задачах 29 и 30 разрешается пользоваться утверждением задачи 28.

31**. Что больше: $\sqrt[n]{n}$ или $\sqrt[n+1]{n+1}$?

32. Какая максимальная площадь может быть у прямоугольного пляжа, отгороженного забором длиной в I км ?

33*. Известно, что $x>0$, $y>0$ и $xy=1$ Найти максимально возможное значение выражения $2x+y$.

34**. Тот же вопрос, если заменить $xy=1$ на $xy^2=1$.

35*. Найдите такое n , чтобы $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < 0.001$

36**. Найдите такое n , чтобы $\sqrt[n]{n} < 1.001$

37**. Докажите, что в любом интервале с положительными концами найдется число вида $\sqrt[m]{n}$, где m и n – натуральные.

38**. Докажите, что дробная часть числа $(2+\sqrt{3})^{100}$ превосходит 0,99.

Учет решенных задач

№	I*	2	3	4	5	6	7	8*	9	I0	II*	I2*	I3	I4	I5	I6
записана																
когда принята																
кем																

I7*	I8*	I9*	20**	2I**	22**	23	24	25*	26	27	28**	29*	30*	3I**	32	33*	34**

35*	36**	37**	38**