Равномощность множеств.

Определение. Множества A и B **равномощны**, если существует взаимно однозначная функция $f: A \to B$. Множество A **счетно**, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$.

1°. Доказать равномощность интервала $]0,1[$ и прямой $\mathbb{R}$.

2°. Доказать равномощность интервала $]0,1[$ и отрезка $[0,1]$. (Если эта задача окажется трудной, см. ниже задачу № 9)

3°. Доказать счетность множества $\mathbb{Z}$ целых чисел и множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

4°. Доказать счетность множества всех конечных последовательностей натуральных чисел.

5. Доказать равномощность множества A_{01} всех бесконечных последовательностей 0 и 1 и множества A_{0123} всех последовательностей из 0,1,2,3.

Как говорят, отношение "быть равномощными" является отношением эквивалентности. Это означает, что оно рефлексивно (каждое множество равномощно самому себе), симметрично (если A равномощно B, то B равномощно A) и транзитивно (если A равномощно B, B равномощно C, то A равномощно C).

6.(а)° Объединение двух счетных множеств счетно. (б)° Объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ счетного числа счетных множеств A_i счетно.

7°. Бесконечное подмножество счетного множества счетно.

8°. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

9°. Доказать, что если A бесконечно, а B конечно или счетно, то $A \cup B$ равномощно A. (Указание. Использовать 8.)

10°. Доказать, что множества $[0,1]$ и $[0,1] \cup [2,3]$ равномощны.

11. Доказать, что если A и B счетны, то множество $A \times B$, состоящее из всех пар $\langle a, b \rangle$ с $a \in A$, $b \in B$, счетно.

12. Доказать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.

13*. Имеется некоторое множество непересекающихся интервалов, вложенных в отрезок $[0,1]$. Доказать, что оно конечно или счетно.

Счетные множества являются "наименьшими" среди бесконечных множеств. Следующая задача показывает, что далеко не все бесконечные множества счетны.

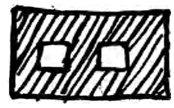
14*. Доказать, что множество A_{01} всех бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно. (Указание. (Желающие решать задачу сами не должны его читать!) Пусть это множество счетно и мы занумеровали все последовательности 0 и 1: первая, вторая,... Как теперь построить последовательность, которую мы пропустили? Постройте последовательность, которая отличается от i-ой на i-ом месте.)

Множества, равномощные множеству всех бесконечных последовательностей 0 и I, называются множествами мощности континуума.

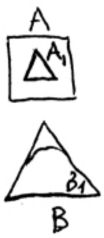
I5.* Доказать, что множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ имеет мощность континуума.

I6.* Доказать, что множество $A_{01} \times A_{01}$ имеет мощность континуума.

I7.* Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей 0,I,2 имеет мощность континуума.

I8.* Доказать, что множества  и  равномощны.

При решении задач I7 и I8, так же как и в некоторых следующих задачах, может оказаться полезной такая



Теорема (Кантор, Бернштейн) Пусть A и B – два множества. Если A равномощно некоторому подмножеству B_I множества B, а B равномощно некоторому подмножеству A_I множества A, то множества A и B равномощны.

Эта теорема довольно трудная. Ей разрешается пользоваться без доказательства. См. также задачу 26.

I9.** Доказать, что $[0, 1]$ имеет мощность континуума. (Принять без доказательства, что каждое действительное число от 0 до 1 однозначно задается бесконечной десятичной дробью, не имеющей 9 в периоде.)

20.** Доказать, что квадрат (внутренность $\cup$ граница) имеет мощность континуума.

2I.* Доказать, что если X и Y имеют мощность континуума, то множества $X \cup Y$ и $X \times Y$ имеют мощность континуума.

22.* Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуума.

23.** Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуума.

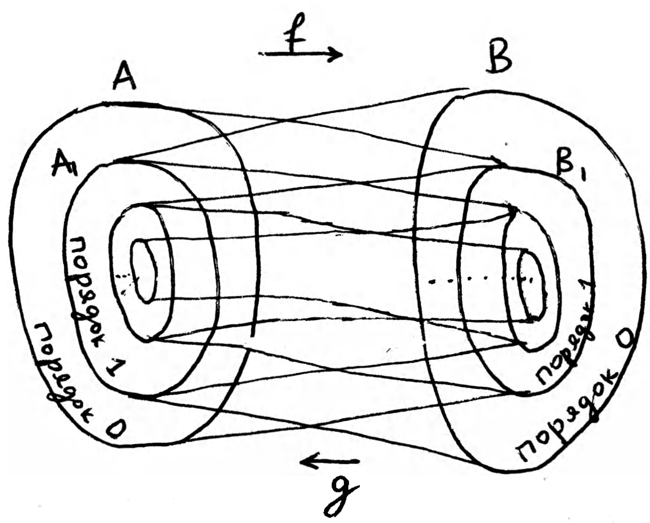
24.** Доказать, что если квадрат представлен в виде объединения двух множеств X и Y, то хотя бы одно из них имеет мощность континуума.

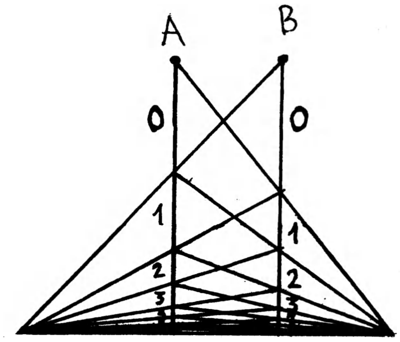
Следующая теорема показывает, что для любого множества A можно построить множество "большей" мощности (смысл слова "больше" мы пока не уточняем).

25.** Теорема Кантора. Докажите, что множество A и множество $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств множества A не равномощны, каково бы ни было множество A . (Указание. Пусть f – вложение A в $\mathcal{P}(A)$; покажите, что f – не наложение, рассмотрев множество $\{x \mid x \notin f(x)\}$.)

Частным случаем этой теоремы является утверждение задачи I4. (Почему

26.** Докажите теорему Кантора – Бернштейна. Указание. Пусть $f: A \to B_1 \subset B$ и $g: B \to A_1 \subset A$ – взаимно однозначные функции. Пусть $x \in A$. Определим последовательность $x_0, x_1, \ldots$ положив $x_0 = x$, $x_1 =$ прообраз x_0 при отображении g, $x_2 =$ прообраз x_1 при отображении f, $x_3 =$ прообраз x_2 при отображении g и т.д. Если построение оборвется на n -ом шаге, то есть если x_{n+1} построить не удастся, будем называть n порядком элемента x. Если построение будет продолжаться неограниченно долго, то назовем x элементом бесконечного порядка. Пусть $A_{чет}$, $A_{неч}$ и $A_{бес}$ – множества элементов четного, нечетного и бесконечного порядков (соответственно) в A, а $B_{чет}$, $B_{неч}$ и $B_{бес}$ – аналогичным образом определенные подмножества в B. Докажите, что f устанавливает взаимно однозначное соответствие между $A_{чет}$ и $B_{неч}$, g – между $B_{чет}$ и $A_{неч}$, и любая из функций f и g – между $A_{бес}$ и $B_{бес}$. Выведите отсюда утверждение теоремы Кантора – Бернштейна.





27.** Назовем <u>восьмеркой</u> объединение двух касающихся (внешним образом) окружностей. Пусть на плоскости задано множество восьмерок, никакие две из которых не пересекаются. Доказать, что это множество конечно или счетно.

28.** Имеется счетное множество A и некоторое семейство подмножеств этого множества. Может ли оно быть несчетным, если:

(а) любые два элемента семейства имеют конечное пересечение;

(б) для любых двух элементов X, Y семейства $X \subset Y$ или $Y \subset X$;

(в) для любых двух элементов X, Y семейства множество $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ конечно ?

29.** Доказать, что множество всех функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ несчетно и не имеет мощности континуума.