Целые числа: еще несколько задач.

1 I. В треугольнике каждое число равно сумме трех стоящих над ним. Доказать, что в каждой строке, начиная с третьей, есть четное число.

```
      I
    I I I
  I 2 3 2 I
I 3 6 7 6 3 I
```

1/3 2. а) Доказать, что при всяком целом К число $K^7 - K$ делится на 7.
б) Доказать, что при всяком целом К и простом р число $K^p - K$ делится на р

2 3. Доказать, что число $I + I/2 + I/3 + \dots + I/K$ не является целым ни при каком натуральном К.

1 4. Доказать, что если Р – простое число, большее 3, то число P^2 дает при делении на 24 остаток I.

4 5. Доказать, что если $A_I, \dots, A_P$ – целые числа, то произведение всех дробей вида $(A_K - A_M)/(K-M)$ – целое число. (В произведение входят дроби при всех К,М, при которых $I \leq M < K \leq P$.)

2 6. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с единицей всегда дает точный квадрат.

3 7. Имеется IOI целое положительное число, все они не больше 200. Доказать, что среди них можно выбрать два числа, одно из которых делится на второе.

3 8. Шахматист играет не менее одной партии в день и не более двенадцати в неделю. Доказать, что можно найти несколько таких дней, идущих подряд, за которые он сыграет ровно 20 партий.

3 9. Доказать, что $t_1 + \dots + t_n = [\frac{n}{1}] + \dots + [\frac{n}{n}]$
где t_i – число делителей целого числа i, а $[A]$ – целая часть A.

3 I0. Обозначим через (А) ближайшее к А целое число (если их два, то берем большее). Доказать, что если N – натуральное число, то
$$N = \left(\frac{N}{2}\right) + \left(\frac{N}{4}\right) + \left(\frac{N}{8}\right) + \dots$$
(сумма продолжается, пока не кончатся ненулевые слагаемые).

II. Найти четырехзначное число вида $\overline{AABB}$, являющееся точным квадратом.

1/3 I2. Найти все пары целых чисел x, y, для которых:
а) $xy = x + y$; б) $1/x + 1/y = 1/14$

2 I3. Числа А и В целые, причем $A^2+B^2 \vdots 2I$. Доказать, что $A^2 + B^2 \vdots 44I\ (= 2I^2)$.

2 I4. Числа p и q простые. Сколько существует натуральных чисел от 1 до pq, взаимно простых с pq ?

3 I5. Доказать, что $n! \not\vdots\ 2^n$ при $n > 2$.

2 I6. Доказать, что существует число вида III...III, делящееся на I983.

2 I7. Пронумеруем подряд все простые числа, начиная с числа 5 (считая его первым). Доказать, что каждое число будет больше своего утроенного номера.

3 I8. Доказать, что любое рациональное число между 0 и I можно представить как сумму обратных величин различных целых чисел.

2 I9. Числа P и 2P + I – простые, P больше 3. Доказать, что число 3P + I – составное.

1 20. Доказать, что уравнение AX + BУ = AB не имеет решений в целых положительных числах, если A и B – взаимно простые целые положительные числа.

3 2I. Доказать, что среди I6 последовательных натуральных чисел всегда есть число, взаимно простое с остальными, а среди I7 – не всегда.

1 22. Доказать, что если между цифрами числа I33I вставить по равному количеству нулей, то получится точный куб.

2 23. Доказать, что выражения 2X + 3У и 9X + 5У делятся на I7 при одних и тех же целых числах X и У.

1 24. Найти все натуральные числа K, при которых число $2^{K} + I$ делится на 3.

1 25. Доказать, что если A и B – положительные целые числа, то число членов последовательности A, 2A, 3A,..., BA , делящихся на B, равно НОД(A,B).

1 26. Доказать, что при любом натуральном K число $5^{K} + 2\cdot 3^{K-I} + I$ делится на 8.

27. По кругу написано 2^{K} целых чисел. С ними многократно проделывают

5 такую операцию: между каждыми двумя числами пишут их сумму, а исходные числа стирают. Доказать, что через некоторое время останутся только четные числа. (Рассмотрите сначала малые значения к .)

I	3 4	7	I6 I8	к=2
2 3		9 II		← Пример к задаче 27
4	6 7	I3	22 24	

28. В ряд выписаны 2^{K} натуральных чисел. Известно, что если

4 выписать все простые множители этих чисел, то среди них будет не более K различных. Доказать, что из данного ряда можно выбрать несколько стоящих подряд чисел так, чтобы их произведение было точным квадратом.

2 29. При каких K число (K – I)! не делится на K ?

30. Пусть a , b , c , d – такие целые числа, что систе-

3 ма уравнений $ax+by=p$, $cx+dy=q$ при всех p и q имеет целочисленные решения. Доказать, что $|ad-bc|=1$.

3I. Разобьем числа I,2,3,4,5 любым способом на две группы.

1 Доказать, что в одной из двух групп всегда можно найти два числа, разность которых будет совпадать с одним из чисел той же группы.

32. Сумма цифр натурального числа не меняется при умножении

1 числа на 5. Доказать, что число делится на 9.

1 33. Число III...III (A единиц) делится на число III...III (B единиц). Доказать, что A делится на B.