Корень.

Мы принимаем такую аксиому:

(КI) Для всякого натурального $n>0$ и всякого неотрицательного a существует неотрицательное x, для которого $x^n=a$.

I.* Докажите, что (КI) не следует из других известных Вам аксиом действительных чисел.

2. Докажите, что при любом натуральном $n>0$ и неотрицательном a число x, для которого $x\geqslant 0$ и $x^n=a$, единственно.

3. Докажите, что если натуральное число n нечетно, то при любом (в том числе отрицательном) a существует и единственно x, для которого $x^n=a$.

<u>Обозначение</u>. Через $\sqrt[n]{a}$ обозначается: а) при нечетном n и любом a – то единственное x, для которого $x^n=a$ (см. задачу 3) б) при четном n и неотрицательном a – то единственное x, для которого $x\geqslant 0$ и $x^n=a$ (см. задачу 2). Например, $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[3]{-8}=-2$, $\sqrt[2]{4}=2$ (но не -2!), $\sqrt[2]{-4}$ не определено.

4. Доказать, что при любых $a,b\geqslant 0$ и любых натуральных $m,n>0$ справедливы равенства $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, $\sqrt[m]{ab}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, $\sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n$.

5. В чем ошибка: $1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$.

6. Построить график функции $x\longmapsto\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{x^3}$.

7. Преобразуйте $1/(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ к виду $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}+\ldots$, где $a,b,c,d,\ldots\in\mathbb{Q}$. (Указание. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\ldots$)

8*. Та же задача для $1/(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$,

9. Найдите сумму $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1982}+\sqrt{1983}}$.

I0. Упростить: $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[6]{81}$. II*. Упростить: $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

I2* Упростить: $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$

I3. Доказать иррациональность $\sqrt[3]{2}$ I4. То же для $\sqrt{6}$

I5. То же для $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

I6. То же для $\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$ (1983 корня)

I7.** Пусть x – корень уравнения $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ с целыми коэффициентами $a_{n-1},\ldots,a_0$, причем x рационален. Доказать, что x – целое число. Вывести отсюда утверждения I3,I4.

I8.* Вывести из I7, что если $a,n\in\mathbb{N}$ и $\sqrt[n]{a}$ рационально, то $\sqrt[n]{a}$ – целое.

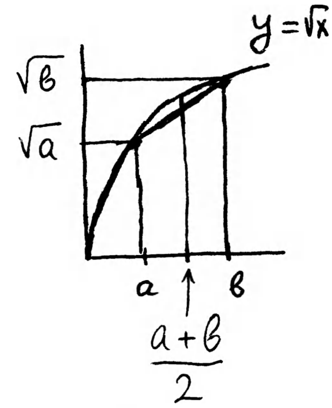
I9.* Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ иррационально.

20.** (Обобщение задачи I9). Доказать, что если $p_1,\ldots,p_n$ – различные простые числа, а $q_1,\ldots,q_n$ – рациональные числа, не все из которых равны 0, то $q_1\sqrt{p_1}+\ldots+q_n\sqrt{p_n}$ иррационально.

2I**. Доказать, что если $x,y,z,\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\in\mathbb{Q}$, то $\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}\in\mathbb{Q}$

22. Доказать, что при любом $n\geqslant 1$ функция $x\longmapsto\sqrt[n]{x}$ строго возрастает: если $x<y$, то $\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}$.

23. Доказать, что если $m>n$, $x>1$, то $\sqrt[m]{x}<\sqrt[n]{x}$.



24. Что больше $\sqrt{5}$ или $\sqrt[3]{11}$?

25*. Что больше: $\sqrt{3}+\sqrt{11}$ или $\sqrt{5}+\sqrt{8}$?

26. Доказать, что $\sqrt{(a+b)/2} \le (\sqrt{a}+\sqrt{b})/2$
Указать на рисунке разность правой и левой частей.

27. Доказать, что

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

(Эти величины называются гармоническим, геометрическим, арифметическим и квадратичным средними чисел a и b .)

28**. Неравенство Коши о среднем арифметическом и геометрическом.
$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \le (a_1+\dots+a_n)/n$$
(Указание. См. задачу I2 листка "Доказательство неравенств")

29*. Сумма n положительных чисел равна a . Какое наибольшее значение может принять их произведение?

30*. Произведение n положительных чисел равно a . Какое наименьшее значение может принять их сумма?

В задачах 29 и 30 разрешается пользоваться утверждением задачи 28.

31**. Что больше: $\sqrt[n]{n}$ или $\sqrt[n+1]{n+1}$?

32. Какая максимальная площадь может быть у прямоугольного пляжа, отгороженного забором длиной в I км ?

33*. Известно, что $x>0$, $y>0$ и $xy=1$ Найти максимально возможное значение выражения $2x+y$.

34**. Тот же вопрос, если заменить $xy=1$ на $xy^2=1$.

35*. Найдите такое n , чтобы $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < 0.001$

36**. Найдите такое n , чтобы $\sqrt[n]{n} < 1.001$

37**. Докажите, что в любом интервале с положительными концами найдется число вида $\sqrt[m]{n}$, где m и n – натуральные.

38**. Докажите, что дробная часть числа $(2+\sqrt{3})^{100}$ превосходит 0,99.

Учет решенных задач

№	I*	2	3	4	5	6	7	8*	9	I0	II*	I2*	I3	I4	I5	I6
записана																
когда принята																
кем																

I7*	I8*	I9*	20**	2I**	22**	23	24	25*	26	27	28**	29*	30*	3I**	32	33*	34**

35*	36**	37**	38**