Комплексные числа, ч. I (Структура поля.)

I. Немного мистики.

Как известно, не существует такого действительного числа i, что $i^2=-1$. Однако забудем на минуту об этом и постараемся сложить и перемножить по обычным правилам числа $2+3i$ и $7+2i$:

$$(2+3i)+(7+2i)=(2+7)+(3+2)i=9+5i;$$
$$(2+3i)\cdot(7+2i)=14+4i+21i+6i^2=(14-6)+(4+21)i=8+25i.$$

I. Сложить и перемножить $(2+3i)$ и $(7-i)$.

2. Найти $(-i)^2$, $(-i)^{10}$.

3*. Найти $(1+i)^{1001}$

4. Доказать тождество $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$

5*. Найти x, для которого $x\cdot(1+i)=1$.

6*. Найти x, для которого $x^2+2x+2=0$.

7*. Найти x, для которого $x^2=i$.

2. Точные определения.

<u>Комплексным числом</u> называется пара $\langle a,b\rangle$, где a, b – любые действительные числа. Комплексные числа $\langle a,b\rangle$ и $\langle a',b'\rangle$ равны, если $a=a'$, $b=b'$. Иногда вместо $\langle a,b\rangle$ пишут $a+bi$; мы не придаем (пока) знакам $+$ и i никакого смысла. Комплексное число $\langle a,b\rangle$ можно изобразить точкой на координатной плоскости с координатами a и b. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$ (complex – комплексное).

I. Изобразить числа $2+3i$, $7-i$, $1+i$.

<u>Суммой</u> чисел $\langle a,b\rangle$ и $\langle a',b'\rangle$ называется число $\langle a+a',b+b'\rangle$. (Как для векторов.) Очевидно, выполнены аксиомы коммутативности ($x+y=y+x$) и ассоциативности ($(x+y)+z=x+(y+z)$)

2. Какое комплексное число нужно назвать нулем (0), чтобы для любого комплексного z выполнялась аксиома $z+0=z$?

3. Как определить операцию взятия противоположного ($z\mapsto -z$), чтобы для любого комплексного z выполнялась аксиома $z+(-z)=0$?

Решив задачи 2 и 3, мы определили на $\mathbb{C}$ операции, удовлетворяющие всем аксиомам сложения – и, следовательно, всем их следствиям. Так что теперь можно складывать и вычитать комплексные числа так же свободно, как и действительные. (Напомним, в частности, что $z-w$ есть по определению $z+(-w)$.)

4. Точки, соответствующие комплексным числам z_1,z_2,z_3,z_4 являются вершинами параллелограмма. Выразить z_4 через z_1,z_2,z_3.

<u>Произведением</u> комплексных чисел $\langle a,b\rangle$ и $\langle a',b'\rangle$ называется число $\langle aa'-bb',\ ab'+a'b\rangle$

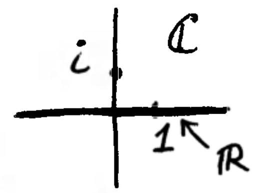
5. Найти $\langle 2, 3\rangle\cdot\langle 7, -1\rangle$, $\langle 0, 1\rangle\cdot\langle 0, 1\rangle$.

6. Доказать справедливость аксиом коммутативности ($xy = yx$), ассоциативности ($x\cdot(yz) = (xy)z$) и дистрибутивности ($x(y+z) = xy + xz$) умножения.

7. Какое число следует назвать единицей (I) , чтобы выполнялась аксиома $z\cdot 1 = z$?

О том, как определять $1/z$, мы скажем дальше.

Умножая и складывая комплексные числа, вторая компонента которых равна 0, мы видим ($\langle a,0\rangle+\langle b,0\rangle=\langle a+b,0\rangle, \langle a,0\rangle\cdot\langle b,0\rangle=\langle ab,0\rangle$), что они ведут себя так же, как действительные числа – их первые компоненты. Поэтому отождествляют действительное число a с комплексным числом $\langle a,0\rangle$. Так "действительная прямая" становится частью "комплексной плоскости". Обозначим число $\langle 0,1\rangle$ через i .



8. Доказать, что $i^2 = -1$

9. Доказать, что $\langle a,b\rangle = a+bi$ (Полная запись: $\langle a,b\rangle = \langle a,0\rangle + \langle b,0\rangle\cdot\langle 0,1\rangle$.)

3. Действительная и мнимая части. Сопряжение. Модуль.

<u>Действительной</u> и <u>мнимой</u> частями комплексного числа $\langle a,b\rangle$ называются (действительные) числа a и b . Обозначения: $a = Re(z)$, $b = Im(z)$ (real – действительный, imaginary – мнимый). Число $\bar z = \langle a,-b\rangle$ называется <u>сопряженным</u> к числу $z = \langle a,b\rangle$. <u>Модулем</u> $|z|$ числа $z=\langle a,b\rangle$ называется расстояние от начала координат до изображающей число z точки комплексной плоскости: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

1. Нарисовать множество $\{z \mid Re\, z + Im\, z = 1\}$.
2. Нарисовать множество $\{z \mid Im((1+i)z) = 1\}$.
3.* Нарисовать множество $\{z^2 \mid Im\, z = 1\}$
4. Нарисовать множества $\{z \mid z = \bar z\}, \{z \mid z = -\bar z\}, \{z \mid z = i\bar z\}$
5. Нарисовать множество $\{z \mid 1 \le |z| < 2\}$.
6. Нарисовать множество $\{z \mid |z+(1+i)| \le 1\}$
7. Нарисовать множество $\{z \mid |z+i| = |z+2|\}$
8. Доказать, что $\overline{(z+w)} = \bar z + \bar w$, $\overline{(zw)} = \bar z\cdot\bar w$, $\bar{\bar z} = z$ для любых $z, w \in \mathbb{C}$.
9. Доказать, что числа $z\cdot\bar z$ и $z+\bar z$ действительны (то есть их мнимая часть равна 0).

10.* Известно, что числа zw и $z+w$ действительны. Доказать, что либо z и w оба действительны, либо $z = \bar w$.

II. Доказать, что $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ (Внимание: слева стоит действительное число, а справа – комплексное. Более точно следовало бы написать $\langle |z|^2, 0 \rangle = z \cdot \bar{z}$.)

I2. Доказать, что $|z+w| \le |z|+|w|$ для любых $z, w \in \mathbb{C}$.

I3. Когда неравенство предыдущей задачи превращается в равенство?

I4. Доказать, что модуль произведения равен произведению модулей: $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ для всех $z, w \in \mathbb{C}$.

I5.* Доказать, что если $z \cdot w = 0$, то $z = 0$ или $w = 0$.

4. Деление

I. Найти такое z , что $z(1+i) = 1$ (Указание. Вычислите $(1+i)(1-i)$.)

2. Доказать, что для всякого $z \ne 0$ найдется такое w , что $zw = 1$ (Указание. Число $z \cdot \bar{z}$ действительно.)

Решив задачу 2, мы получаем возможность ввести операцию взятия обратного $z \longmapsto 1/z$, определенную при всех $z \ne 0$, так, чтобы выполнялась аксиома $z \cdot (1/z) = 1$ для всех $z \ne 0$.

Как мы видим, для комплексных чисел выполнены все аксиомы сложения и умножения (см. "Действительные числа") и, следовательно, все их следствия. (Аксиомы $z \cdot 0 = 0$ и $1+\ldots+1 \ne 0$ очевидно верны.)

3. Доказать, что если $z \cdot w = 0$, то $z = 0$ или $w = 0$.

4. Вычислить $1/i$, $1/(-2i)$, $1/(1+i)$, $1/(4-7i)$. Напомним, что a/b есть по определению $a \cdot (1/b)$

5. Вычислить $(1+i)/(1-i)$, $(3+4i)/(1+i)$, $(5+i)/(1-5i)$.

6. Доказать, что $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$.

5. Квадратные уравнения.

I. Найти все комплексные z , для которых $z^2 = 1$. (Очевидно, I и –I таковы; есть ли другие?) (Указание: $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$)

2. Найти все комплексные z , для которых $z^2 = -1$.

3. Найти все комплексные z , для которых $z^2 = a$. (Число a – произвольное действительное число.)

4. Числа a , b , c – произвольные действительные. При каких z выполнено равенство $az^2 + bz + c = 0$?

5.* Доказать, что для любого комплексного c уравнение $z^2 = c$ имеет ровно 2 решения.

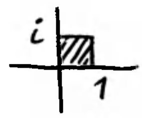
6.* Решить уравнения $z^2 = i$, $z^2 = (1+i)$.

7* Доказать, что при любых комплексных a, b, c при $a \neq 0$ уравнение $az^2+bz+c=0$ имеет I или 2 решения в зависимости от того, равен ли дискриминант $D=b^2-4ac$ нулю.

8. Разложить на множители многочлены z^2+1 и z^2-2z+2. (Многочлены - множители могут иметь комплексные коэффициенты.)

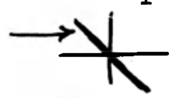
6. Комплексные числа и преобразования плоскости.

Функции $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ можно рассматривать как преобразования комплексной плоскости.

I. Найти образ и прообраз множества 

при преобразовании $f: z \mapsto z+(2+i)$

2. Какие преобразования (повороты, симметрии, гомотетии и т.д.) задают формулы: (I) $z \mapsto \bar{z}$; (2) $z \mapsto -z$; (3) $z \mapsto iz$; (4) $z \mapsto 2z$; (5) $z \mapsto i\bar{z}$?

3* Написать формулы, задающие: (I) центральную симметрию с центром $(1+2i)$; (2) осевую симметрию с осью  (3) гомотетию с центром $1-i$ и коэффициентом 2.

4* Найти образ прямой $\operatorname{Re} z=1$ при функции $z \mapsto z^2$.

5* Доказать, что точки z и $1/\bar{z}$ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и произведение их модулей равно I. (Указание. $1/\bar{z} = z/(z\bar{z})$) Преобразование $z \mapsto 1/\bar{z}$ называется инверсией с центром 0 и радиусом I.

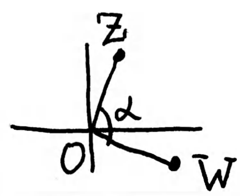
6* Найти образ прямой $\operatorname{Re} z=1$ при функции $z \mapsto 1/z$ (Указание. Это - окружность.)

7** Доказать, что образом прямой или окружности при функции $z \mapsto 1/z$ является прямая или окружность. (При этом прямая может перейти в окружность и наоборот!)

8** Доказать аналогичное утверждение для функции $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$.

9. Доказать, что если C - комплексное число, равное по модулю I, то $z \mapsto Cz$ есть движение (т.е. не меняет расстояний.) Мы увидим впоследствии, что это движение - поворот.

7. Разное.



I* Изобразим комплексные числа z и w точками Z и W плоскости. Доказать, что

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |OZ| \cdot |OW| \cdot \cos\alpha$$

2* Доказать, что если z - комплексный корень уравнения $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ с действительными коэффициентами a_i, то $\bar{z}$ - также его корень.

3.* Доказать, что если уравнение $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ с действительными коэффициентами a_i имеет ровно 1983 корня, то оно имеет действительный корень.

4.* Найти все "автоморфизмы $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$", т.е. все функции $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для которых $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{C}$ и $f(t) = t$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Назовем <u>целым комплексным</u> числом число вида $a+bi$, где a, b – целые (в обычном смысле) числа. Очевидно, сумма и произведение целых комплексных чисел – целое (комплексное) число. Множество всех целых комплексных чисел обозначается $\mathbb{Z}[i]$.

5.* Пусть $a, b \in \mathbb{Z}[i]$. Говорят, что a делится на b, если существует $c \in \mathbb{Z}[i]$, для которого $a = bc$. Найти все делители числа I. (Указание. Их четыре: ± 1 и $\pm i$. Чтобы доказать, что других нет, используйте формулу $|zw| = |z| \cdot |w|$.)

6.* Найдите все делители чисел 2 и 3.

7.* Число $a \in \mathbb{Z}[i]$ называется простым (в $\mathbb{Z}[i]$), если оно не имеет разложений $a = bc$, кроме тех, в которых b или c является делителем I. Будут ли числа 2, 3, 5, $1+i$ простыми?

8.* Разложить числа из предыдущей задачи на простые множители.

9.** Сформулировать и доказать теорему об однозначности разложения на простые множители для элементов $\mathbb{Z}[i]$.

10.** Доказать, что простое (в обычном смысле) число p будет простым в $\mathbb{Z}[i]$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2+y^2 = p$ не имеет решений в обыкновенных целых числах.

11.** (Продолжение.) Доказать, что это бывает тогда и только тогда, когда p дает остаток 3 при делении на 4.

12.* Доказать, что если $1/z_1 + 1/z_2 + \ldots + 1/z_n = 0$ то найдутся такие положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n = 0$.