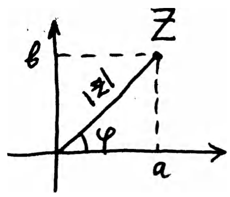
Комплексные числа, часть II

I. Модуль и аргумент.



Напомним, что комплексное число $z=a+bi$ изображается точкой $z\langle a,b\rangle$, а расстояние от начала координат до точки z называется модулем числа z и обозначается $|z|$: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Аргументом числа z называется величина угла φ, на который нужно повернуть ось абсцисс для того, чтобы она проходила через точку z. Число φ определено с точностью до кратных 360^0 (или 2π, если углы измеряются в радианах): если φ – аргумент z, то $\varphi+360\cdot k$ $(\varphi+2\pi k)$ – также аргумент z (при целых k).

I. Найти модуль и аргумент чисел $i, 1+i, \sqrt{3}+i, 3-4i, -7$.

2. Число z имеет модуль r и аргумент φ. Найти его действительную и мнимую части.

3. По модулю и аргументу (измерен в радианах) найти число: (1) $2, \pi$; (2) $0, \pi/3$; (3) $\sqrt{2}, -\pi/4$; (4) $-2, 3\pi/2$; (5) $1, \pi/2$.

4. Число z_1 имеет модуль r_1 и аргумент φ_1, число z_2 имеет модуль r_2 и аргумент φ_2. Доказать, что их произведение $z_1 z_2$ имеет модуль $r_1\cdot r_2$ и аргумент $\varphi_1+\varphi_2$. (Указание. Использовать формулы для синуса и косинуса суммы.)

При умножении комплексных чисел модули умножаются, а аргументы складываются!

Мы видим, что аргумент подобен логарифму: аргумент произведения есть сумма аргументов. Это не случайно: на самом деле аргумент есть (при надлежащем понимании этих слов) "мнимая часть логарифма".

Обозначим через $U(\varphi)$ комплексное число с модулем I и аргументом φ.

5. Доказать, что $U(\varphi_1+\varphi_2)=U(\varphi_1)\cdot U(\varphi_2)$, $U(-\varphi)=1/U(\varphi)=\overline{U(\varphi)}$.

6. Доказать, что при целом n выполнено равенство $U(n\varphi)=[U(\varphi)]^n$.

7. Используя формулы $(a+b)^2=\ldots$, $(a+b)^3=\ldots$ и предыдущую задачу, выразить $\cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \cos 3\varphi, \sin 3\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

8.* Вычислить суммы $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi$ и $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi$. (Указание. Использовать функцию U и формулу суммы геометрической прогрессии.)

9.* Вычислить суммы $\cos\varphi+2\cos 2\varphi+\ldots+n\cos n\varphi$ и $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+n\sin n\varphi$.

IO. Пусть φ – произвольное число. Рассмотрим преобразование f комплексной плоскости, являющееся умножением на $U(\varphi)$: $f(z)=z\cdot U(\varphi)$. Что это за преобразование?

II.* Пусть w – произвольное комплексное число. Доказать, что преобразование умножения на w ($z\longmapsto wz$) есть преобразование подобия, являющееся композицией поворота и гомотетии. Найти угол поворота и коэффициент гомотетии.

I2.* **Доказать, что** $\cos\varphi+\cos\left(\varphi+\frac{360}{n}\right)+\cos\left(\varphi+2\cdot\frac{360}{n}\right)+\ldots+\cos\left(\varphi+(n-1)\frac{360}{n}\right)=0$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ \varphi\in\mathbb{R})$.

2. Разные задачи.

I3.* Доказать, что если числа a, b, c являются вершинами равностороннего треугольника, то $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$. Верно ли обратное?

I4. Какие значения может принимать аргумент числа z, если $|z-2i|<1$?

I5.* Найти множество тех z, для которых (I) $|(z-1)/(z+1)|=1$; (2) $|(z-1)/(z+1)|=2$.

I6.* На плоскости даны точки a и b. Где находятся те z, для которых число $(z-a)/(z-b)$ (I) действительное; (2) чисто мнимое?

I7.* Доказать, что уравнение вида $z\bar{z}+az+\bar{a}\bar{z}+c=0$, где $a\in\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{R}$, задает пустое множество, точку или окружность. Как определить, что именно? Всякую ли окружность можно так задать?

3. Корни из единицы.

I8. Найти все z, для которых $z^n=1$. (Их n.) Они называются корнями n-ой степени из I.

I9. Найти все z, для которых $z^n=a$ (a – заданное комплексное число).

20.* Если z – корень n-ой степени из I, то z^k – также корень n-ой степени из I (при любом k). Если среди z^k при всех $k\in\mathbb{Z}$ встречаются все корни n-ой степени из I, то z называют <u>первообразным</u> корнем. Сколько существует первообразных корней n-ой степени, если (I) $n=6$; (2) $n=100$?

2I.* Доказать, что сумма всех корней n-ой степени из I равна 0 (при $n>1$).

22.* Дан правильный многоугольник $A_1\ldots A_n$. Доказать, что сумма $|XA_1|^2+|XA_2|^2+\ldots+|XA_n|^2$ зависит лишь от расстояния от точки X до центра описанной около многоугольника окружности.

23.* Имеется конечное множество $S\subset\mathbb{C}$, для которого выполнено такое свойство: произведение двух элементов из S принадлежит S. Известно, что $0\notin S$. Доказать, что: (I) $1\in S$; (2) если $x\in S$ то $1/x\in S$; (3) $|x|=1$ для всех $x\in S$; (4) всякий элемент $x\in S$ является корнем некоторой степени из I; (5) S состоит из всех корней степени n из I, где n – число элементов в S.

24.* Найти произведение всех корней степени n из I.

25.* Число x является корнем из I степеней a и b. Доказать, что оно является корнем из I степени НОД (a, b). В частности, ни одно число (кроме 1) не может одновременно быть корнем из I степеней a и b, если a и b взаимно просты.

26.* Существует ли число z с $|z|=1$, не являющееся корнем из I (ни для какой степени)?

27.** Является ли число 3/5 + 4/5 i корнем из I ?

28.** Какие числа вида $a+bi$, где a и b рациональны, являются корнями из I ? (Ответ: $1, -1, i, -i$.)

4. Инверсия.

Инверсией с центром O и радиусом r называется преобразование, переводящее каждую отличную от O точку X в такую точку X', лежащую на луче OX, что $|OX|\cdot|OX'|=r^2$.

29. Какие точки неподвижны при инверсии? Чему равно $f\circ f$, если f – инверсия?

30. Доказать, что если f – инверсия, а точки A и B не лежат на прямой, проходящей через центр инверсии, то около четырехугольника с вершинами A, B, $f(A)$, $f(B)$ можно описать окружность.

31.* Доказать, что при инверсии прямые, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности, проходящие через центр инверсии; наоборот, окружности, проходящие через центр, переходят в прямые, не проходящие через центр.

32.* Доказать, что окружности, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности, не проходящие через центр инверсии.

33.* Куда переходит число z при инверсии с центром 0 и радиусом 1?

34.* Нарисовать множество $\{z \mid Re(1/z)=1/2\}$.

35.* Доказать, что при преобразовании $z\mapsto 1/z$ прямые и окружности переходят в прямые и окружности (хотя окружности монут перейти в прямые, а прямые – в окружности).

36.* Доказать, что любое дробно-линейное преобразование (преобразование вида $z\mapsto(az+b)/(cz+d)$, где $a,b,c,d\in\mathbb{C}$, $ad-bc\neq 0$) является композицией нескольких преобразований, каждое из которых есть либо сдвиг ($z\mapsto z+c$), либо гомотетия ($z\mapsto kx$, $k\in\mathbb{R}$), либо поворот вокруг начала координат, либо преобразование $z\mapsto 1/z$. Что будет при $ad-bc=0$?

37.* Доказать, что при дробно-линейном преобразовании прямые и окружности переходят в прямые и окружности.

38.* Доказать, что при инверсии сохраняются углы между окружностями и прямыми: если окружности (или окружность и прямая, или две прямые) пересекались под углом α, то их образы тоже пересекаются под углом α (Угол измеряется как угол между касательными.)

39.* Доказать, что любое дробно-линейное преобразование сохраняет углы между прямыми и окружностями.

40.* Построить дробно-линейное преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость $\{z \mid \mathrm{Im}\, z>0\}$ в единичный круг $\{z \mid |z|<1\}$.