

МНОГОЧЛЕНЫ

А. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ

Определения. Многочленом называется выражение $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, где a_i — числа, называемые коэффициентами. Два многочлена считаются равными, если равны их коэффициенты. При записи обычно опускаются члены с нулевым коэффициентом и единичные коэффициенты, так что $1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$ записывается как $1 + x^2$ (или $x^2 + 1$ — слагаемые часто переставляют). Степенью ненулевого многочлена P называют наибольшую из степеней его членов (с ненулевыми коэффициентами). Она обозначается $\deg P$ (degree (англ) = степень).

Определим операции сложения и умножения многочленов. Суммой многочленов $a_0 + a_1x + \dots$ и $b_0 + b_1x + \dots$ называется многочлен $c_0 + c_1x + \dots$, где $c_i = a_i + b_i$, а произведением — многочлен $d_0 + d_1x + \dots$, где $d_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$ (складываются произведения коэффициентов при степенях, дающих в сумме n).

1. Что можно сказать о $\deg(P+Q)$ и $\deg(PQ)$, если известно, что $\deg P$ и $\deg Q$ равны соответственно (1) 5 и 7; (2) 7 и 7?

2. Найти коэффициент при x^{13} в многочлене $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{1983})(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{1984})$

3. Известно, что произведение двух многочленов равно 0. Можно ли утверждать, что один из них равен 0?

4. Доказать, что если $P \cdot Q = P \cdot R$, причем $P \neq 0$, то $Q = R$. (Указание. См. предыдущую задачу.)

5. Для каких многочленов P найдется такой многочлен Q , что $PQ = 1$?

6. Доказать, что коэффициент при x^n в произведении $(a_0 + a_1x + \dots)(b_0 + b_1x + \dots)(c_0 + c_1x + \dots)$ равен сумме всех произведений вида $a_k \cdot b_\ell \cdot c_m$, для которых $k + \ell + m = n$.

7. Найти коэффициент при x^n в $(1 + x + x^2 + \dots + x^n)^k$

8. Многочлены P и Q имеют целые коэффициенты. Все коэффициенты их произведения PQ делятся на 5. Доказать, что все коэффициенты P делятся на 5 или все коэффициенты Q делятся на 5.

Строго говоря, определение многочлена не вполне ясно: будет ли, например, $1 + y + y^2$ многочленом? Равен ли он многочлену $1 + x + x^2$? И вообще, что такое многочлен? Формальное определение таково: многочленом называется произвольная последовательность чисел $a_0, a_1, \dots$ в которой конечное число ненулевых членов. Отказавшись от требования конечности, мы получаем определение формального степенного ряда.

Ряды можно складывать и умножать по тем же формулам, что и многочлены.

9. Верно ли, что если произведение двух рядов равно 0, то один из них равен 0?

10. Какие ряды имеют обратные? (Ряд Q - обратный для P , если $PQ = 1$.) Найти обратный ряд для $1 + x$.

11. Найти обратный ряд к ряду $1 + 2x + 4x^2 + \dots + 2^n x^n + \dots$

12. Найти обратный ряд к ряду $1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n! + \dots$

13. Определим производную P' многочлена $P = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ формулой $P' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$.

Докажите правила дифференцирования: $(P+Q)' = P' + Q'$, $(cP)' = cP'$, $(PQ)' = P'Q + P Q'$.

Б. Значения

Значением многочлена $P = a_0 + a_1x + \dots$ на числе α называется число $P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots$. Таким образом, с каждым многочленом сопоставляется функция $\alpha \mapsto P(\alpha)$, которую часто отождествляют с исходным многочленом (и обозначают той же буквой). Это отождествление согласовано со сложением и умножением: $(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$ и $(PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)$. Число α называется корнем многочлена, если $P(\alpha) = 0$.

14. Придумать многочлен степени 4, имеющий корни 1, 2, 3, 4.

15. Найти все корни многочлена $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

(Указание. $(x-1)(x-2)(x-3) = ?$)

16. Существует ли многочлен степени 1, у которого $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 4$?

17. Пусть P и Q - многочлены степеней m и n . Доказать, что композиция соответствующих функций также соответствует некоторому многочлену: найдется такой многочлен R , что $R(a) = P(Q(a))$. Какова степень многочлена R ?

18. Найти сумму всех коэффициентов многочлена $(1+x-x^2)^{1983} (1+2x-2x^2)^{1984}$.

19. Многочлен $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ имеет корни $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Какие корни у многочленов (1) $a_0 - a_1x + a_2x^2 - \dots + (-1)^n a_nx^n$; (2) $a_n + a_{n-1}x + \dots + a_{n-k}x^k + \dots + a_0x^n$?

20. (Продолжение.) Написать многочлен, корнями которого были бы числа $2\alpha_1, \dots, 2\alpha_k$ (выразив его коэффициенты через a_i).

21. Доказать, что все значения многочлена $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ (при всех действительных x) положительны.

22. Доказать, что если P - многочлен с целыми коэффициентами, a, b - целые числа, то число $P(b) - P(a)$ кратно $b - a$.

(Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.)

23. Доказать, что если α — целый корень многочлена

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \text{ с целыми коэффициентами,}$$

то α — делитель a_0 .

Эта задача позволяет найти все целые корни многочлена указанного вида, перебрав все делители a_0 . Как показывает следующая задача, если старший коэффициент равен 1, то при этом мы найдем не только все целые, но и все рациональные корни.

24. Доказать, что если α — рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, то α — целое число. Используя это, доказать иррациональность $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{2}$.

Отказываясь от требования "старший коэффициент равен 1", получаем такое обобщение (позволяющее найти все рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами).

25. Доказать, что если p/q — несократимая дробь, являющаяся корнем многочлена $a_n x^n + \dots + a_0$ с целыми коэффициентами, то a_0 делится на p , а a_n делится на q . Выведите отсюда утверждения двух предыдущих задач.

26. Найдите все рациональные корни многочленов $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ и $6x^3 - 7x^2 + 1$, используя предыдущую задачу.

27. Существует ли такой многочлен P , что $P(n) = 2^n$ при всех натуральных n ?

28. Существует ли такой многочлен P с целыми коэффициентами степени не меньше 1, что $P(n)$ — простое число при всех натуральных n ?

29. Существует ли такой многочлен P , что $\cos 17x = P(\cos x)$ при всех x ?

30. Рассмотрим все функции f , которые сопоставляют с каждым многочленом P некоторое число $f(P)$, причем $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$, $f(PQ) = f(P) \cdot f(Q)$ и если $P = a_0$ — многочлен степени 0, то $f(P) = a_0$. Докажите, что функция, сопоставляющая с каждым многочленом

(1) сумму всех его коэффициентов; (2) его свободный член; (3) его значение $P(a)$ в некоторой фиксированной точке a — таковы. Докажите, что (1) и (2) представляют собой частные случаи (3). Верно ли, что любая такая функция имеет вид $P \mapsto P(a)$ для некоторого a ?

31. Какими должны быть коэффициенты a, b, c , чтобы многочлен $ax^2 + bx + c$ принимал целые значения во всех целых точках?

Многочлен $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ называется "разностной производной" многочлена P .

32. Как связаны степени P и Q ?

33. Доказать, что для любого многочлена Q степени не выше n найдется многочлен P степени не выше $n+1$ ("разностный интеграл"), для которого $P(x+1) - P(x) = Q(x)$ при всех x .

34. С последовательностью $a_0, a_1, a_2, \dots$ проделали такую операцию: под каждым членом последовательности написали их разность. Затем эту операцию повторяют. Доказать, что если исходной была последовательность $P(0), P(1), \dots$, где P - некоторый многочлен, то через несколько шагов получится последовательность из одних нулей. Верно ли обратное?

35. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, для которого $P(7) = 11$, $P(11) = 13$?

В. Делимость и корни

Говорят, что многочлен P делится на многочлен Q (обозначение $P : Q$), если существует такой многочлен R , что $P = Q \cdot R$.

36. Делится ли (1) x^2 на $x^3 + 1$; (2) $x^2 + 3x$ на $2x + 6$?

37. Какие многочлены являются делителями многочленов (1) 1 (2) 0; (3) $1 + x$?

38. Доказать, что если P, Q, R, S - многочлены, $PQ = RS$ и $P : R$, то $S : Q$.

39. (Теорема о делении с остатком.) Пусть A и B - многочлены, $B \neq 0$. Тогда существуют и единственны такие многочлены Q (частное) и R (остаток), что $A = BQ + R$ и ($\deg R < \deg B$ или $R = 0$).

40. Найти частное и остаток при делении $x^7 + x^5 + 1$ на $2x^2 - 4$.

41. Доказать, что если $B : C$, то A и $A + B$ дают одинаковые остатки при делении на C .

42. Делится ли $x^{10} - 1$ на $x^2 + 1$?

43. (Теорема Безу.) Пусть P - многочлен, a - число. При делении P на $x - a$ остаток равен $P(a)$.

44. Доказать, что свойства $P : (x - a)$ и $P(a) = 0$ равносильны.

45. При каких c многочлен $x^{1984} + x^3 + c$ делится на $x - 1$?

46. Если $a_1, \dots, a_n$ - различные корни многочлена P , то P делится на $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$.

47. Доказать, что многочлен степени n имеет не более n корней.

48. Доказать, что если многочлены P и Q задают одну и ту же функцию, то есть $P(x) = Q(x)$ при всех x , то P и Q равны (то есть имеют равные коэффициенты).

49. (Формулы Виета.) Многочлен $x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$ имеет k различных корней $x_1, \dots, x_k$. Выразить коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ через корни.

50. Доказать, что для любого многочлена P свойства (I) $P(-1) = P(1) = 0$ и (2) $P : (x^2 - 1)$ равносильны.

51. Доказать, что если $P : Q$, то (множество корней P) $\subset$ (множество корней Q). Верно ли обратное?

52. Доказать, что если $P(a) = Q(a)$ при бесконечно многих a , то многочлены P и Q равны.

53. Известно, что многочлен P дает при делении на $x - 1$ остаток 3, а при делении на $x + 1$ остаток 5. Определить остаток при делении P на $x^2 - 1$.

54. При каких p и q остаток от деления $x^5 + 3x^3 + px^2 + qx + 3$ на $x^2 + 2$ равен $x + 1$?

55. При каких n и k многочлен $x^n - 1$ делится на $x^k - 1$?

56. Остатки при делении многочлена P на $(x - a)$, $(x - b)$ и $(x - c)$ равны соответственно a^2 , b^2 , c^2 (a, b, c — различные числа). Найти остаток при делении P на $(x - a)(x - b)(x - c)$.

57. Доказать, что если
$$\begin{cases} a + b + c + d = 0, & a + 2b + 4c + 8d = 0 \\ a + 3b + 9c + 27d = 0, & a + 4b + 16c + 64d = 0 \end{cases}$$
 то $a = b = c = d = 0$

58. Найти остаток от деления $x^{1984} - 1$ на $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$

59. Решить уравнение $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

(Указание. Один из корней равен -1 .)

60. (Интерполяция.) Пусть $x_1, \dots, x_n$ — различные числа, $y_1, \dots, y_n$ — произвольные числа. Доказать, что существует и единствен многочлен P , степень которого не выше $n - 1$ и $P(x_i) = y_i$ при всех $i = 1, \dots, n$. (Другими словами, через n точек плоскости, никакие две из которых не лежат на одной вертикали, проходит единственный график многочлена степени не выше $n - 1$.) (Указание. Единственность вытекает из того, что число корней многочлена не больше его степени. Для доказательства

существования рассмотрите сначала случай, когда все y_i , кроме одного, равны 0.)

61. Найдите многочлен степени не выше 3, для которого $P(0) = 1$, $P(1) = -1$, $P(2) = 1$, $P(3) = -1$

62. Многочлен P таков, что $P(x) = P(-x)$ при всех x . Доказать, что найдется такой многочлен Q , что $P(x) = Q(x^2)$ при всех x .

63. Многочлен P таков, что $P(x) = -P(-x)$ при всех x . Доказать, что найдется такой многочлен Q , что $P(x) = x Q(x^2)$ при всех x .

64. Доказать тождество
$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

65. Доказать, что если P — многочлен степени n и $P(x)$ целое при всех целых x , то все коэффициенты многочлена $n! P$ целые. Можно ли утверждать, что все коэффициенты P целые?

66. Обозначим через C_x^n многочлен $x(x-1)\dots(x-n+1)/n!$. Доказать, что всякий многочлен степени n однозначно представляется в виде $a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + \dots + a_1 C_x^1 + a_0$.

67. (Продолжение.) Доказать, что для любого многочлена P свойства (1) $P(m)$ целое при всех целых m ; (2) коэффициенты $a_n, \dots, a_0$ в представлении, рассмотренном в предыдущей задаче, целые, — равносильны.

68. Доказать, что всякий многочлен степени 3 однозначно представляется в виде (1) $a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$
(2) $a + b(x-1) + c(x-1)(x-2) + d(x-1)(x-2)(x-3)$

69. Число a называется корнем многочлена P кратности k , если P делится на $(x-a)^k$. (Таким образом, обычные корни — корни кратности 1.) Доказать, что свойства (1) a — корень многочлена P кратности k ; (2) $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$ ($P^{(i)}$ — i -ая производная многочлена P), — равносильны.

Д. Делимость в кольце многочленов.

Напомним, что многочлен P делится на Q (запись $P : Q$), если существует такой многочлен R (частное), что $P = Q \cdot R$.

70. Что можно сказать о многочленах P и Q , если $P : Q$ и $Q : P$?

Многочлен S называется наименьшим общим кратным (НОК) многочленов P и Q , если выполнены 2 условия:

(1) S — их общее кратное, т.е. $S : P$, $S : Q$;

(2) если S' – любое общее кратное P и Q , то S' кратно S ($S' : P, S' : Q \Rightarrow S' : S$).

71. Доказать, что многочлен S наименьшей степени, кратный P и Q , является их наименьшим общим кратным. (Указание. Пусть S' – любое общее кратное. Разделите S' на S с остатком.)

72. Доказать, что любые два наименьших общих кратных данных многочленов отличаются на ненулевой постоянный множитель.

Две предыдущие задачи показывают, что наименьшее общее кратное всегда существует (что из определения сразу не вытекает) и почти единственно (если пренебречь постоянным множителем). Следующие задачи утверждают то же самое про наибольший общий делитель.

Многочлен S называется наибольшим общим делителем (НОД) многочленов P и Q , если выполнены 2 условия:

(1) S является их общим делителем, то есть $P : S, Q : S$

(2) если S' – их общий делитель, то S' – делитель S :

$$P : S', Q : S' \Rightarrow S : S'$$

Заметим, что из определения не следует, что такой многочлен S существует. Мы докажем это впоследствии (и даже несколькими способами).

73. Найти многочлен, являющийся наибольшим общим делителем многочленов P и 0 (нуль).

74. Пусть P дает при делении на Q остаток R . Доказать, что многочлен S является наибольшим общим делителем P и Q тогда и только тогда, когда он является наибольшим общим делителем многочленов Q и R .

Таким образом, если мы желаем доказать существование или найти наибольший общий делитель многочленов P и Q , можно заменить P его остатком при делении на Q . Такую замену (переход от пары P, Q с $\deg P \geq \deg Q$ и $Q \neq 0$ к паре Q, R (остаток от деления P на Q)) мы будем называть "преобразованием Евклида".

75. Пусть P, Q – произвольные многочлены, $\deg P \geq \deg Q$. Будем применять к ним преобразование Евклида, пока это возможно. Чем закончится этот процесс? Как найти после этого НОД (P, Q)?

Этот способ отыскания наибольшего общего делителя называется алгоритмом Евклида. Из этой задачи, в частности, следует, что наибольший общий делитель всегда существует.

76. Найти НОД многочленов (1) $x+1$ и x^2+1 ; (2) $x^{15}-1$ и x^9-1 ; (3) $x^4+3x^3+5x^2+4x+2$ и $x^5+x^4+2x^3-1$.

77. Пусть R_1 и R_2 являются наибольшими общими делителями многочленов P и Q . Как связаны они между собой?

78. (Другое доказательство существования НОД.) Пусть S — наименьшее общее кратное многочленов P и Q . Доказать, что $PQ : S$ и частное R от деления PQ на S является наибольшим общим делителем многочленов P и Q . (Это рассуждение не дает, однако, способа отыскания НОД, т.к. требует знания наименьшего общего кратного.)

79. Пусть S и T — НОК и НОД многочленов P и Q . Доказать, что $PQ = kST$, где k — ненулевое число.

Будем говорить, что многочлен R выразим через многочлены P и Q , если найдутся такие многочлены A и B , что $R = AP + BQ$.

80. Выразим ли многочлены: (I) $x+1$ через x и x^2 ;
(2) 1 через x и $x+1$?

81. Какие многочлены выразим через (I) $x+1$ и x ;
(2) x^2 и x^2+x ?

82. Пусть P и Q — произвольные многочлены. Доказать, что сумма и разность многочленов, выражимых через P и Q , выразимы через P и Q . Доказать, что произведение произвольного многочлена и многочлена, выражимого через P и Q , выразимо через P и Q .

83. Пусть P и Q — произвольные многочлены. Доказать, что через P и $P-Q$ выразимы те же самые многочлены, что и через P и Q .

84. Доказать, что, применяя преобразование Евклида к паре многочленов, мы не меняем множество выражимых через них многочленов: если при делении P на Q получается остаток R , то через Q и R выразимы те же многочлены, что и через P и Q .

85. Пусть P и Q — произвольные многочлены. Доказать, что через них выразимы те и только те многочлены, которые делятся на НОД (P, Q). (Указание. См. предыдущую задачу.)

86. Выразить (I) $x+1$ через x^4+1 и x^3+1 ;
(2) 1 через $(x-2)(x-3)$ и $x(x-1)$.

Следующие задачи содержат еще одно доказательство существования НОД любых двух многочленов.

Множество I многочленов называется идеалом, если оно обладает такими свойствами:

$$(I) \quad A, B \in I \Rightarrow A+B, A-B \in I$$

$$(2) \quad A \in I, B - \text{любой многочлен} \Rightarrow AB \in I$$

87. Будут ли идеалами: (1) множество всех многочленов с нулевым свободным членом; (2) множество всех ненулевых многочленов; (3) множество всех кратных данного многочлена P ; (4) множество всех многочленов, выражимых через данные многочлены P и Q ; (5) множество всех многочленов, для которых $P(1) = 0$; (6) множество всех многочленов, для которых $P(1) = P(2) = 0$; (7) множество всех многочленов, для которых $P(1) + P(2) = 0$; (8) множество всех многочленов с рациональными коэффициентами?

88. Пусть I — произвольный идеал, P — многочлен наименьшей степени, содержащийся в I . Доказать, что идеал I состоит из всех кратных многочлена P и только из них. (Указание. Использовать теорему о делении с остатком.)

Идеал, состоящий из всех кратных многочлена P , называется главным идеалом с образующей P . Таким образом, утверждение предыдущей задачи может быть сформулировано так: в кольце многочленов (с действительными коэффициентами) всякий идеал является главным.

89. Многочлены P и Q являются образующими одного и того же идеала I . Как они связаны?

90. Найти образующие идеалов (1) многочленов с нулевым свободным членом; (2) многочленов P , для которых $P(1) = 0$; (3) многочленов P , для которых $P(1) = P(2) = 0$.

91. Пусть I — идеал всех многочленов, выражимых через P и Q ; D — его образующая. Доказать, что D есть наибольший общий делитель P и Q . (Из этой задачи следует, помимо существования наибольшего общего делителя, также и описание выражимых через P и Q многочленов, см. задачу 85.)

92. Пусть I и J — идеалы. Доказать, что $I \cap J$ и $I + J = \{i+j \mid i \in I, j \in J\}$ — идеалы. Как связаны их образующие с образующими идеалов I и J ?

Многочлены P и Q называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, кроме констант (т.е. если $1 = \text{НОД}(P, Q)$).

93. Доказать, что свойства (1) P и Q взаимно просты; (2) существуют такие многочлены X и Y , что $XP + YQ = 1$, — равносильны.

94. (Продолжение.) Доказать, что если P и Q взаимно просты, то найдутся такие X и Y , что $XP + YQ = 1$, $\deg X < \deg Q$, $\deg Y < \deg P$.

95. (Основная лемма о взаимной простоте.) Если AB делится на C , а A взаимно просто с C , то B делится на C . (Указание. Если $XA + YC = 1$, то $B = B(XA + YC)$.)

Многочлен P , не являющийся константой, называется простым, или неприводимым, если в любом его разложении на 2 множителя один из них – константа: если $P = QR$, то Q или R – константа.

96. Доказать, что если P неприводим, а Q – любой многочлен, не делящийся на P , то Q взаимно прост с P .

97. Доказать, что если произведение двух многочленов делится на неприводимый многочлен P , то один из них делится на P .

98. (Продолжение.) Доказать то же самое для произведения произвольного числа многочленов.

99. Доказать, что всякий многочлен, отличный от константы, можно разложить в произведение неприводимых.

100. Доказать, что разложение на неприводимые множители единственно: если $A = P_1 \cdot \dots \cdot P_n = Q_1 \cdot \dots \cdot Q_n$

то $m = n$ и после подходящей перенумерации можно получить

$P_i = c_i Q_i$, где c_i – константы.

101. Для каких многочленов P равенство $xP(x-1) = (x-26)P(x)$ справедливо при всех x ?

102. Известно, что $(x-1)(x^2+px+q) = (x-3)(x^2+rx+s) = (x-5)(x^2+lx+m)$ при всех x . Найти p, q, r, s, l, m .

Д. Основная теорема алгебры и ее следствия.

До сих пор мы неявно предполагали, что коэффициентами многочленов являются действительные числа. Однако все наши рассуждения остаются в силе и для многочленов с комплексными коэффициентами. Комплексный случай даже проще вещественного, так как имеет место

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один (комплексный) корень.

Доказательство этой теоремы использует сведения из курса анализа и будет дано впоследствии.

103. Доказать, что всякий многочлен P с комплексными коэффициентами разлагается на линейные множители, т.е. представим в виде $k(x-a_1)\dots(x-a_n)$, где n – степень P , $a_1, \dots, a_n$ и k – комплексные числа.

104. Доказать, что если z – (комплексный) корень многочлена с действительными коэффициентами, то $\bar{z}$ – также его корень.

105. Как изменятся корни многочлена с комплексными коэффициентами и его разложение на линейные множители (задача 103), если все коэффициенты многочлена заменить на комплексно-сопряженные?

IO6. Доказать, что в разложении на линейные множители (задача IO3) многочлена с действительными коэффициентами все множители $(x - \alpha)$ с $\alpha \notin \mathbb{R}$ можно разбить на пары $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ комплексно сопряженных.

IO7. Доказать, что всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных и квадратных множителей с действительными коэффициентами, т.е. представим в виде $c(x - a_1) \dots (x - a_k)(x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_sx + q_s)$.

Обратите внимание, что в условии этой задачи нет ни слова о комплексных числах — они появляются только в её решении!

IO8. Доказать, что всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

IO9. Найти многочлен с действительными коэффициентами наименьшей степени, для которого $1 + i$, $2 - i$ и 3 — корни.

IOO. Разложить на линейные множители (с комплексными коэффициентами) многочлены $x^2 + 1$, $x^4 + 1$, $x^n - 1$, $x^n + 1$.

III. Пусть P — многочлен с комплексными коэффициентами, $x_1, \dots, x_s$ — его корни, $k_1, \dots, k_s$ — их максимальные кратности. Доказать, что $P = a(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_s)^{k_s}$ где a — старший коэффициент многочлена P .

II2. Доказать, что многочлен степени n имеет n (комплексных) корней, если каждый корень учитывать столько раз, какова его кратность.

II3. Доказать, что для любых двух многочленов P и Q свойства (1) $P : Q$ и (2) всякое комплексное число z , являющееся корнем Q кратности k , является корнем P кратности k , — равносильны. (Напомним, что согласно нашему определению всякий корень кратности k является корнем кратности l при $l < k$!)

II4. Доказать, что если многочлен с действительными коэффициентами принимает во всех действительных точках неотрицательные значения, то его можно представить в виде $P = Q_1^2 + \dots + Q_e^2$ где $Q_1, \dots, Q_e$ — многочлены с действительными коэффициентами.

II5. Пусть P — произвольный многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами. Доказать, что задаваемая им функция $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является наложением.

II6. (Продолжение.) Доказать, что при этом отображении каждая точка $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа точек, имеет ровно n прообразов.

II7. Доказать, что в задаче II4 можно положить $l = 2$.

Е. Различные множества коэффициентов

Все рассмотренные в пп. А – Г свойства многочленов справедливы для многочленов с коэффициентами в любом поле (полем называется множество с операциями сложения, умножения, взятия обратного и противоположного, 0 и 1, удовлетворяющим обычным аксиомам). В частности, все эти свойства справедливы для многочленов с рациональными, действительными и комплексными коэффициентами.

Однако если мы рассматриваем многочлены с целыми коэффициентами, то ситуация меняется (т.к. $\mathbb{Z}$ не поле: нет взятия обратного).

II8. Привести примеры, показывающие, что теорема о делении с остатком и теорема о главных идеалах не выполняются для многочленов с целыми коэффициентами.

К многочленам с целыми коэффициентами мы еще вернемся; рассмотрим теперь, что меняется при переходе от одного поля к другому (от $\mathbb{Q}$ к $\mathbb{R}$ и от $\mathbb{R}$ к $\mathbb{C}$). Соответствующие множества многочленов обозначаются $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}[x]$.

II9. Доказать, что свойство делимости не меняется при расширении поля: если $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$, то $P:Q$ в $\mathbb{Q}[x]$ равносильно $P:Q$ в $\mathbb{R}[x]$. (Аналогично для $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}[x]$.)

I20. Доказать, что наибольший общий делитель не меняется при расширении поля: если $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ и R – их наибольший общий делитель, то он останется их наибольшим общим делителем в $\mathbb{R}[x]$.

I21. Какие многочлены являются неприводимыми (I) в $\mathbb{C}[x]$; (2) в $\mathbb{R}[x]$?

I22. Будут ли неприводимыми в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены (I) $x - 1$; (2) $x^2 - 1$; (3) $x^2 - 2$; (4) $x^2 + 1$ (5) $x^3 - 2$; (6) $x^2 + x + 1$; (7) $x^3 + x^2 + x + 1$; (8) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; (9) $x^4 - 2$?

I23. Разложить многочлены предыдущей задачи на неприводимые множители в $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$.

Как видно из приведенных примеров, неприводимость (= простота), в отличие от взаимной простоты, существенно зависит от поля коэффициентов.

I24. При каких n многочлен $x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$?

Наиболее прост, как всегда, комплексный случай.

I25. Доказать, что многочлены $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ не взаимно просты тогда и только тогда, когда они имеют общий корень, т.е. существует такое $z \in \mathbb{C}$, что $P(z) = Q(z) = 0$.

126. Пусть $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{C}[x]$. Доказать, что следующие свойства равносильны:

(1) существуют такие многочлены $Q_1, \dots, Q_n \in \mathbb{C}[x]$, что $P_1 Q_1 + \dots + P_n Q_n = 1$;

(2) не существует такого $z \in \mathbb{C}$, что $P_1(z) = \dots = P_n(z) = 0$

127. Доказать, что если многочлен $P \in \mathbb{Q}[x]$ имеет кратный корень в $\mathbb{C}$, то он приводим в $\mathbb{Q}[x]$ (т.е. разлагается на множители с рациональными коэффициентами).

Изучим теперь подробнее $\mathbb{Z}[x]$ (кольцо многочленов с целыми коэффициентами)

128. Доказать, что если α — целый корень многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$ то $P = (x - \alpha) \cdot Q$, где Q — многочлен с целыми коэффициентами (теорема Безу для $\mathbb{Z}[x]$; напомним, что теорема о делении с остатком, вообще говоря, неверна в $\mathbb{Z}[x]$!)

129. Доказать, что если $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ таковы, что $P(x) = Q(x+1)$ при всех x , то они одновременно приводимы или неприводимы в $\mathbb{Z}[x]$.

Назовем содержанием многочлена с целыми коэффициентами наибольший общий делитель его коэффициентов.

130. (Лемма Гаусса.) Доказать, что произведение двух многочленов с содержанием 1 есть многочлен с содержанием 1. (Указание. Если все коэффициенты произведения PQ делятся на некоторое простое число p , а для сомножителей это не так, то произведение двух "ненулевых по модулю p " многочленов P и Q — "нулевой по модулю p многочлен".)

131. Доказать, что содержание произведения многочленов равно произведению их содержаний.

132. Доказать, что если многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$ разлагается на множители с рациональными коэффициентами: $P = RS$, $R, S \in \mathbb{Q}[x]$, то он разлагается и на множители с целыми коэффициентами $P = R_1 S_1$, причем R_1 и S_1 отличаются от R и S лишь рациональным множителем.

Таким образом, если многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$, то он неприводим и в $\mathbb{Z}[x]$.

133. Вывести из предыдущей задачи утверждение о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами (если p/q — несократимая дробь, являющаяся корнем $P = a_n x^n + \dots + a_0$, то $a_0 : p$, $a_n : q$).

134. Придумать алгоритм, позволяющий по любому многочлену с целыми коэффициентами определить, будет ли он неприводим в $\mathbb{Z}[x]$ и $\mathbb{Q}[x]$. (Указание. (1) Если $P : Q$, то $P(a) : Q(a)$ при любом a ; (2) Многочлен степени n определяется своими значениями в $n+1$ точке.)

I35. Доказать, что любой многочлен с целыми коэффициентами, отличный от 1 и -1 ; однозначно разлагается на неприводимые в $\mathbb{Z}[x]$ множители. (Указание. Воспользуйтесь установленной связью между разложениями в $\mathbb{Z}[x]$ и $\mathbb{Q}[x]$, а также однозначностью разложения в $\mathbb{Q}[x]$.)

I36. Доказать, что в $\mathbb{Z}[x]$ существуют НОД и НОК любой пары многочленов. (Напомним, что НОД — это общий делитель, делящийся на любой общий делитель, а НОК — общее кратное, делящее любое общее кратное.)