Разные задачи о многочленах

I. (Формула Тейлора) Доказать, что если P – многочлен, то $P(a+h) = P(a) + P'(a)h + P''(a)h^2/2! + \ldots + P^{(n)}(a)h^n/n!$ (правая часть продолжается до тех пор, пока слагаемые не обращаются в нуль).

2. Доказать, что если многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ степени n имеет n (различных) вещественных корней, то многочлен P' имеет $n-1$ (различных) вещественных корней. Остается ли это утверждение верным, если разрешить корням совпадать и учитывать кратности?

3. Доказать, что многочлен $1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n!$ не имеет кратных корней

4. Пусть P – многочлен с комплексными коэффициентами и старшим коэффициентом I. Доказать, что найдется точка $z \in \mathbb{C}$ с $|z| = 1$, для которой $|P(z)| \geq 1$.

5. Дан пятиугольник $ABCDE$ и окружность радиуса 1. Доказать, что на окружности найдется точка M, для которой $|MA| \cdot |MB| \cdot |MC| \cdot |MD| \cdot |ME| \geq 1$

6. Доказать, что комплексные корни многочлена P' лежат в выпуклой оболочке корней многочлена P. (Это значит, что если вбить в комплексную плоскость гвозди в корнях P и натянуть на них резинку, то корни P' окажутся внутри.)

7. (Оценка корней многочлена через коэффициенты.) Доказать, что любой корень многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ со старшим коэффициентом I не превосходит $\max(1, |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)$

8. Доказать, что для любого p найдется многочлен степени p с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом I, все значения которого в целых точках делятся на p.

9. (Продолжение.) Доказать, что для простого p не существует многочлена меньшей степени со свойством, указанным в предыдущей задаче.

Комплексное число называется <u>алгебраическим</u>, если оно является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Все остальные числа называются <u>трансцендентными</u>.

IO. Доказать, что существуют трансцендентные числа.

II. Если иррациональное число α таково, что при любом n неравенство $|\alpha - p/q| \leq 1/q^n$ имеет бесконечное число целочисленных решений, то α трансцендентно (теорема Лиувилля).

I2. Доказать, что число $\alpha = 0{,}11000100\ldots$ (единицы стоят на I, 2, 6 (=3!), 24 (=4!),... местах после запятой) трансцендентно.

I3. Доказать, что если $\alpha \neq 0$ – алгебраическое, то и $1/\alpha$ – алгебраическое число.

14. Доказать, что если α и β – алгебраические числа, то $\alpha+\beta$ и $\alpha\cdot\beta$ – алгебраические.

15. Доказать, что комплексное число z является алгебраическим тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ являются алгебраическими.

16. Пусть α – алгебраическое число. Рассмотрим все многочлены $P\in\mathbb{Q}[x]$, для которых $P(\alpha)=0$. Пусть P_0 – многочлен наименьшей степени среди них. Доказать, что любой многочлен $P\in\mathbb{Q}[x]$ для которого $P(\alpha)=0$, делится на P_0. (Указание. Множество таких P – идеал.) Многочлен P_0 называется минимальным многочленом алгебраического числа α.

17. Найти минимальный многочлен чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

18. Пусть $f:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ таково, что $f(P+Q)=f(P)+f(Q)$, $f(PQ)=f(P)\cdot f(Q)$ и $f(c)=c$ (c – константа = многочлен нулевой степени). Такие f называют автоморфизмами кольца $\mathbb{R}[x]$. Описать все автоморфизмы $\mathbb{R}[x]$. Какие из них являются взаимно однозначными?

19. Доказать, что если значения многочлена P степени n в $n+1$ идущих подряд целых точках – целые, то его значения во всех целых точках – целые.

20. Многочлен P с комплексными коэффициентами таков, что $P(x)$ действительно при действительных x. Доказать, что его коэффициенты действительны. Что можно сказать о коэффициентах P, если $P(ix)\in\mathbb{R}$ при всех действительных x?

21. (Критерий Эйзенштейна.) Доказать, что если многочлен $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ с целыми коэффициентами таков, что все коэффициенты (кроме старшего, равного 1) делятся на некоторое простое p, причем a_0 не делится на p^2, то он неприводим в $\mathbb{Z}[x]$. (Указание. "По модулю p" – т.е. пренебрегая кратными p членами – этот многочлен есть x^n, поэтому его сомножители должны быть степенями x (по модулю p), а тогда a_0 делится на p^2.)

22. Доказать, что многочлен $Q(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+\dots+1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$ тогда и только тогда, когда p простое. (Указание. Рассмотреть многочлен $Q(x+1)$ и воспользоваться критерием Эйзенштейна.)

23. Доказать, что если значение многочлена $P\in\mathbb{Z}[x]$ в трех целых точках равно 1, то он не имеет целых корней.

24. Определить кольцо $\mathbb{R}[x,y]$ "многочленов от двух переменных" и доказать однозначность разложения на неприводимые в нем.

(Краткое указание. Многочлены с двумя переменными можно рассматривать как многочлены с одной переменной, коэффициенты которых - многочлены от другой переменной; далее поступать аналогично случаю $\mathbb{Z}[x]$.)

25. Доказать, что многочлен $1+x+x^2/2!+\ldots+x^n/n!$ имеет не более одного вещественного корня.

26. (Теорема Декарта.) Назовем <u>числом перемен знака</u> в последовательности действительных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ число пар соседних членов разных знаков (если в последовательности есть нули, выкинем их и подсчитаем число пар после этого). Доказать, что число положительных корней (с учетом кратности) многочлена с действительными коэффициентами равно числу перемен знаков в последовательности его коэффициентов или меньше его на (положительное) четное число.

27. (Продолжение.) Доказать, что если все корни многочлена действительны, то в предыдущей задаче имеет место равенство.

28. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - корни степени n из единицы. Найти многочлен степени $n-1$, равный 1 в одном из этих корней и 0 в остальных. Установить, что модули всех его коэффициентов равны $1/n$.

29. В единичную окружность на комплексной плоскости вписан правильный n-угольник. Доказать, что если $P \in \mathbb{C}[x]$ - многочлен степени $n-1$, один из коэффициентов которого по модулю не меньше I, то $|P(z)| \geq 1$ хотя бы для одной точки z , являющейся вершиной n-угольника. (Ср. задачу 4.)

30. Многочлен P_n , для которого $P_n(\cos x) = \cos nx$, называется n-ым <u>многочленом Чебышёва</u>. Доказать, что такой многочлен существует, единствен, имеет вещественные коэффициенты и степень n .

31. (Продолжение.) Найти корни многочленов Чебышёва и их старшие коэффициенты. (Указание. Ответ "старший коэффициент равен I " неверен.)

32. (Продолжение.) Найти число решений уравнений $P_n = 1$ и $P_n = -1$ на отрезке $[-1, 1]$ (P_n - n-ый многочлен Чебышёва).

33. (Продолжение.) Доказать, что если многочлен P с действительными коэффициентами таков, что $|P(x)| \leq 1$ при $|x| \leq 1$, то уравнение $P(x) = P_n(x)$ имеет не меньше n решений (P_n - n-ый многочлен Чебышёва). (Указание. См. задачу 32.)

34. Доказать, что если P - многочлен степени n с действительными коэффициентами и со старшим коэффициентом 1, то $|P(x)| \geq 1/2^{n-1}$ хотя бы для одного $x \in [-1, 1]$. Эту оценку нельзя улучшить.

35. Даны n точек $A_1 \ldots A_n$ и отрезок длины I. Доказать, что на отрезке найдется точка M, для которой $|MA_1| \cdot \ldots \cdot |MA_n| \geq 1/2^{2n-1}$.

36. Доказать, что многочлен $(x-a_1) \ldots (x-a_n) - 1$ где $a_1, \ldots, a_n$ - различные целые числа, неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

Комплексное число называется <u>целым алгебраическим</u> числом, если оно есть корень многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом I.

37. Какие существуют целые алгебраические числа среди рациональных? Будет ли число $\sqrt{2}/2$ целым алгебраическим?

38. Доказать, что сумма и произведение целых алгебраических чисел - целое алгебраическое число.

39. Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2}$ иррационально.

40. Функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сопоставляющая с каждой парой действительных чисел $\langle x, y \rangle$ число $f(x,y)$, такова, что при каждом x функция $y \longmapsto f(x,y)$ совпадает с некоторым многочленом, а при каждом y функция $x \longmapsto g(x,y)$ совпадает с некоторым многочленом. Доказать, что f можно представить как сумму слагаемых вида $c_{k\ell} x^k y^\ell$. (Указание. Множество действительных чисел несчетно.)

41. Даны произвольные комплексные числа $a_0 \ldots a_n$ (среди которых, возможно, есть совпадающие) и произвольные комплексные числа $z_0, \ldots, z_n$. Доказать, что существует единственный многочлен P степени не выше n, для которого $P(a_0) = z_0$, $P'(a_1) = z_1$, $P''(a_2) = z_2, \ldots, P^{(n)}(a_n) = z_n$

Заказ IOI-84. Тираж 50. ИПМ АН СССР