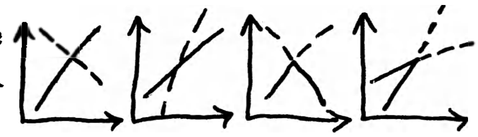
Задачи по анализу

I. Производная, мгновенная скорость, касательная.

I.I. На рисунках показаны мировые линии двух автомобилей. Какие дорожно-транспортные происшествия изображены?



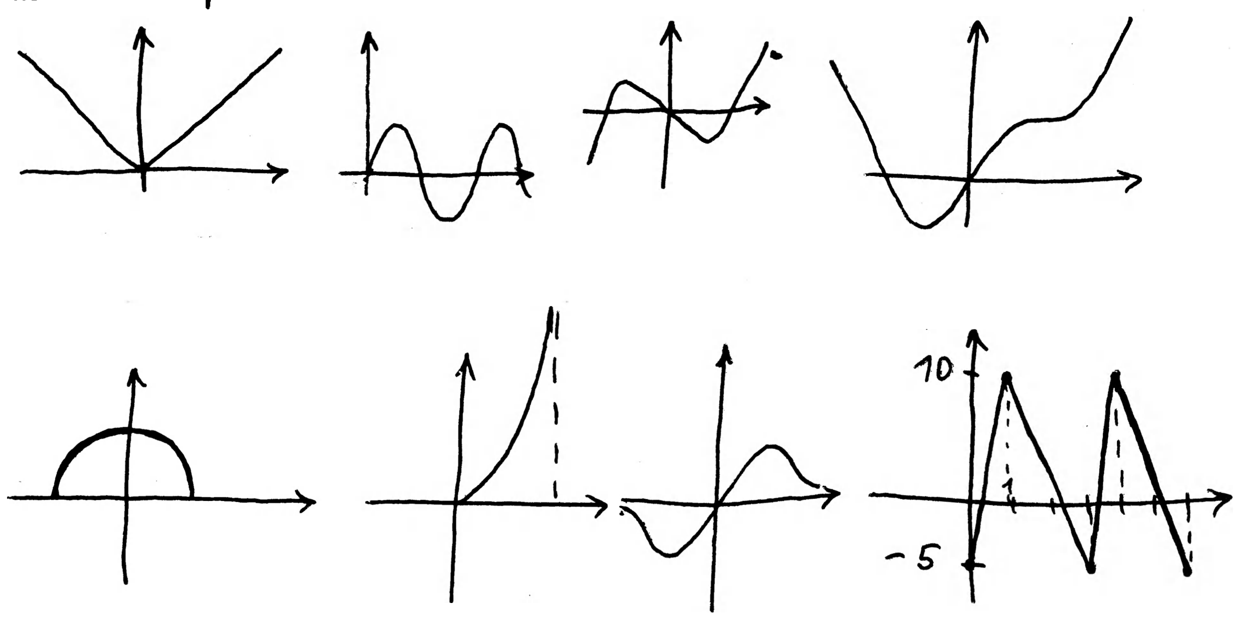
I.2. Из Нью-Йорка в Гавр в I2 ч. ежедневно отправляется пароход и через 7 дней прибывает в Гавр. Сколько пароходов встретит на своем пути пароход, отправляющийся в I8 часов (того же времени) из Гавра в Нью-Йорк?

I.3.* Тело движется по прямой и за каждую секунду проходит I метр. Можно ли утверждать, что оно движется равномерно?

I.4. При движении по формуле $x(t) = t^2$ найти мгновенную скорость в любой момент времени t.

I.5. (Продолжение.) Дать другое решение предыдущей задачи, использующее то, что касательная к параболе имеет с ней одну общую точку.

I.6. Нарисовать графики функции f' для следующих функций f:



I.7. Найти производную функцию f', если $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

I.8. Для каких функций формула $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ точна?

I.9. Найти приближенно $\sqrt{4.001}$

2. Учимся дифференцировать.

2.1. Найти производную функции $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$.

2.2. Найти производную функции $x \mapsto 1/x^2$.

2.3. Найти производную функции $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

2.4. Известно, что $f(x) = g(x+1)$.*) Чему равно $f'(a)$?

2.5. Известно, что $f(x) = g(2x)$.*) Чему равно $f'(a)$?

2.6. Известно, что $f(x) = g(-x)$.*) Чему равно $f'(a)$?

2.7. Функция f четна ($f(x) = f(-x)$). Как связаны $f'(a)$ и $f'(-a)$? чему равно $f'(0)$?

2.8. Тот же вопрос для нечетной функции ($f(-x) = -f(x)$).

2.9. Верно ли, что если f' нечетна, то f четна?

Найти производную функции f, если $f(x)$ равно *)

2.10. $3 - 2x$. 2.11. $(x+2)^3$. 2.12* $x\sqrt[4]{x^3}$. 2.13* $(x^2+1)(\sqrt{x}+1)$. 2.14* $(x+1)^{100}$ 2.15* $(2x+1)^{100}$ 2.16* $\sqrt{2-3x}$. 2.17* $\sqrt{1-x^2}$. 2.18* $[g(x)]^n$, где g – функция, производная которой известна.

3. Зачем нужно дифференцировать?

3.1. Доказать, что если функция f строго возрастает на $[a,b]$ и $[b,c]$, то она строго возрастает на $[a,c]$.

3.2. Найти промежутки возрастания и убывания для функции $x \mapsto x^3 - 3x^2$ и ее наибольшее и наименьшее значения на $[-1, 2]$.

3.3* Нарисовать на плоскости множество тех $\langle p, q \rangle$, при которых функция $x \mapsto x^3 + px^2 + qx$ возрастает на всём $\mathbb{R}$.

3.4. Найти наибольшее значение xy, если $2x + 3y = 1$; $x, y \geq 0$.

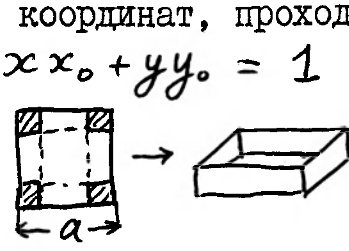
3.5. Найти наибольшее значение xy^2, если $2x + 3y = 1$; $x, y \geq 0$.

3.6. Найти число корней уравнения $x^3 - x - a = 0$ (в зависимости от a).

3.7. Найти максимум и минимум функции $x \mapsto x^2 - 3|x| + 2$ на отрезке $[-2, 1]$

3.8. Доказать, что уравнение касательной к окружности единичного радиуса с центром в начале координат, проходящей через точку $\langle x_0, y_0 \rangle$, имеет вид $xx_0 + yy_0 = 1$.

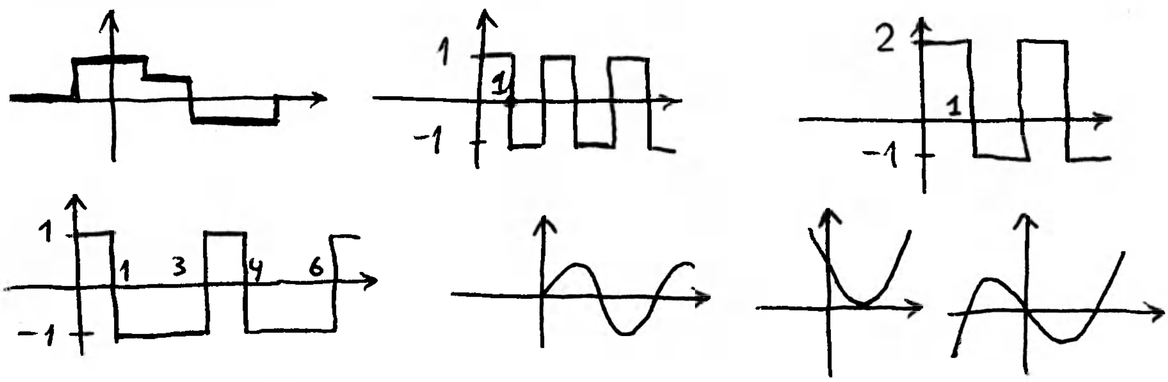
3.9. Каков максимальный объем коробки, которую можно сложить из квадратного листа $a \times a$ (см. рис.)?



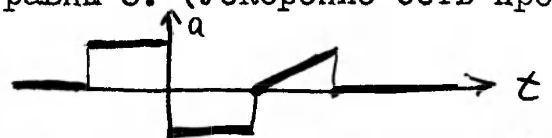
*) при всех x

4. Интеграл.

4.1. Построить по графику зависимости скорости от времени график зависимости координаты от времени:



4.2. Построить по графику ускорения графики зависимости скорости и координаты от времени. При $t=0$ скорость и координата равны 0. (Ускорение есть производная скорости: $a(t)=v'(t)$.)



4.3. Функция f нечетна: $f(-x)=-f(x)$. Чему равен $\int_{-a}^{a} f$?

4.4. Пусть g – некоторая функция. Определим f так: $f(a)=\int_0^a g$. Чему равно f' ?

4.5.* Функция f имеет период I: $f(x+1)=f(x)$ при всех x. Доказать, что число $\int_a^{a+1} f$ не зависит от выбора a.

4.6. Найти $\int_a^b f$, если $f(x)=x^2+x$.

4.7. Найти $\int_a^b f$, если $f(x)=\sqrt{x}$.

4.8.* Найти $\int_a^b f$, если $f(x)=x\sqrt{x}$.

4.9. Найти $\int_0^1 f$, если $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

(Указание. Площадь круга радиуса r равна πr^2.)

4.I0. Известно, что $f(x)=Cg(x)$. Чему равно $\int_a^b f$? (Ответ требуется выразить через интеграл от функции g.)

4.II. Известно, что $f(x)=g(x+1)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.I2. Известно, что $f(x)=g(-x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.I3. Известно, что $f(x)=g(2x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

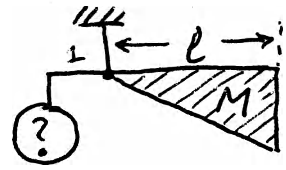
4.I4. Известно, что $f(x)=g(x)+h(x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.I5.* Существует ли такая функция f, что $\int_a^b f = b-2a$ при всех a и b ?

4.I6. Как надо определить $\int_a^b f$ при $b<a$, если мы хотим, чтобы равенство $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$ было верно всегда?

5. Интеграл в физике.

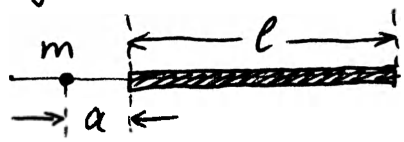
5.I. Какая гиря нужна, чтобы уравновесить однородный прямоугольный треугольник массы M с катетом l ?



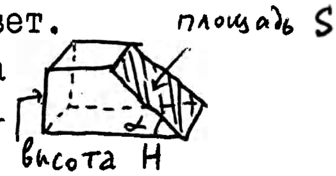
5.2. Найти объем шара радиуса r .

5.3. Найти площадь поверхности шара радиуса r . (Указание. Если покрыть шар слоем краски толщиной h , то получится шар радиуса $r+h$.)

5.4.* Закон всемирного тяготения утверждает, что массы m_1 и m_2 , находящиеся на расстоянии r , притягиваются друг к другу с силой $\gamma m_1 m_2 / r^2$ (γ – "гравитационная постоянная"). Найти силу притяжения однородного стержня массы M длиной l и маленького шара массы m , находящегося на расстоянии a от конца стержня. Что получается при $a=0$? Объясните бессмысленный ответ.



5.5. Найти силу давления, действующую на наклонную стенку сосуда (см. рисунок), заполненного водой.



5.6.* Воздушный шар сначала 20 секунд поднимается со скоростью 2 м/с, а затем, выпустив часть газа, спускается с такой же скоростью. Над землей дует ветер, скорость которого пропорциональна высоте и равна 0.5 м/с на высоте I м. На каком расстоянии от точки старта приземлится шар?

Анализ: еще несколько задач

I.* Альпинист вчера поднялся на вершину, а сегодня спустился. Доказать, что есть точка, в которой он был дважды в одно и то же время суток.

2.* Из города А в город Б ведут две дороги. Из А в Б по этим дорогам выехали две машины, связанные веревкой в 20 м, и приехали в Б, не порвав веревки. Доказать, что два круглых воза радиусом II м, едущих по этим дорогам навстречу друг другу, не смогут разъехаться.

3.* Улитка ползла в одном направлении 6 минут. За это время её наблюдали несколько человек, каждый наблюдал минуту и за эту минуту она проползла не более I м. Ни в один момент она не оставалась без наблюдения. Могла ли она проползти больше 6 м? Больше I2 м?

4.* Эскалатор движется со скоростью u. Нарисовать на плоскости те пары (v_1, v_2), при которых человек, бегущий по эскалатору со скоростью v_1, насчитает больше ступенек, чем бегущий со скоростью v_2. (Не забудьте рассмотреть различные знаки у v_1 и v_2.)

5.* Доказать, что абсцисса точки пересечения двух касательных к параболе (графику квадратного трехчлена) равна полусумме абсцисс точек касания.

6.** Система $x = y^2 + C_1,\ y = x^2 + C_2$ имеет единственное решение (x_0, y_0). Доказать, что $x_0 y_0 = 1/4$.

7.* Найти производную функции $x \longmapsto (\sqrt{x^3+x})/(2x+1)^{10}$.

8.* Найти точку параболы $y = x^2$, ближайшую к точке $(-1, 2)$.

9.* Найти $f'(x)$, если $f(x)$ – длина кривой с уравнением (I) $y = |x|$ (2) $y = x + |x|$ между точками с абсциссами -1 и x.

I0.* Найти уравнение касательной к кривой $x^2 + y^4 = 2$ в точке $(1, 1)$.

II.** Найти уравнение касательной к кривой $x^3 + x + y^3 + y = 1$ в точке $(1, 0)$.

I2.* Найти расстояние от каждой из точек $(0, 4)$ и $(0, 6)$ до параболы $y = x^2/10$.

I3.* Автомобиль движется с ускорением, не превышающим a по модулю. Какое наибольшее расстояние он может проехать за время t, если в конце пути он должен остановиться?

14.** Функция f такова, что при всех x и h погрешность $\alpha(x,h)$ в формуле $f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h$ (т.е. разность её левой и правой частей) не превосходит Ch^3, где C – константа. Доказать, что f – линейная функция, т.е. при некоторых a и b равенство $f(x)=ax+b$ верно при всех x.

15.* Выпуклое множество M на плоскости имеет площадь S и периметр l. Доказать, что площадь множества всех точек, удаленных от M не более чем на r, равна $a+br+cr^2$, где a, b и c – константы, не зависящие от r. Найти a, b, c.

16.* Функция $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ удовлетворяет условиям $f'(x)=f(x)$, $f(0)=1$. Найти a_i.

17.* (Продолжение.) Вычислить $f(1)$ с точностью 10%.

18.** (Продолжение.) Доказать, что $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ при всех x и y.

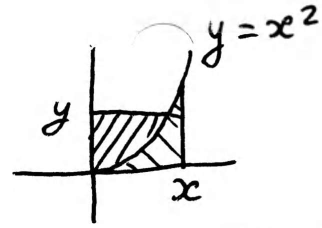
19.* Найти длину кривой $y=x^{3/2}$ между точками с абсциссами 0 и 1.

20.* Доказать, что интегралы от функции $f: x\mapsto 1/x$ по отрезкам $[a,b]$ и $[ca,cb]$ равны.

21.* Доказать неравенство:

$$xy\le (x^3/3)+\frac{2}{3}y^{3/2} \quad \text{при } x,y\ge 2$$

(Указание. См. рисунок.) Когда это неравенство превращается в равенство?



22.* Функция f – убывающая. Доказать, что при $0\le\alpha\le 1$ выполнено неравенство $\int_0^\alpha f\le\alpha\int_0^1 f$

23.* Доказать, что если $f(a)=f(b)=0$, то

$$\int_a^b |f|\le[(a-b)^2/4]\cdot\max\{|f'(x)| \mid x\in[a,b]\}$$

24.** Доказать, что если $g(x)=f(x-1/x)$, то интегралы $\int_0^\infty g$ и $\int_0^\infty f$ равны.

25.** Если функции f и g либо обе возрастают, либо обе убывают, то $\int_0^1(f\cdot g)\ge\left(\int_0^1 f\right)\cdot\left(\int_0^1 g\right)$

26.** Функция f такова, что множество $\{\langle x,y\rangle \mid y>f(x)\}$ выпукло (f' монотонно возрастает). Доказать, что

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)\le\int_a^b f\le\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \qquad (a<b)$$