# Комбинаторика, ч. I. (Подготовительные задачи. Принцип Дирихле.)

Подготовительные задачи.

I. Сколько диагоналей в 1983-угольнике?

2. Каждая из 10 команд сыграла с каждой по одному разу. Сколько всего было игр?

3. Сколько существует чисел от I до 1000, которые делятся на 2 или делятся на 3, но не делятся на 6?

4. Сколько существует двузначных чисел, первая цифра которых содержится среди цифр $\{1, 2, 3, 6\}$, а вторая – среди цифр $\{2, 3, 5, 7, 9\}$ ?

5. Экзаменационный билет содержит вопрос по алгебре, по геометрии и задачу. Вопросов по алгебре – 20, по геометрии – 30, задач – 100. Сколько различных билетов можно составить?

6. Автомобильный номер содержит 3 буквы и 4 цифры. Учитывая, что букв в русском алфавите 33, и разные машины должны иметь разные номера, оценить максимально возможное число автомобилей.

7. Известно, что в множестве $A$ имеется $a$ элементов, в множестве $B$ – $b$ элементов, а в $A \cap B$ – $c$ элементов. Сколько элементов в множествах: (I) $A \cup B$ (2) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ?

8. Сколькими способами можно разменять 15 коп. монетами по 1 и 2 коп.? Монетами по 1, 2, 5 коп.?

Следующее (очевидное) утверждение весьма важно.

<u>Основной принцип комбинаторики</u>. Пусть $A$ и $B$ – два конечных множества, $f : A \to B$ – взаимно однозначная функция. Тогда число элементов в множестве $A$ (обозначается $|A|$) равно числу элементов в множестве $B$ : $|A| = |B|$.

Напомним, что для установления взаимно однозначного соответствия между $A$ и $B$ необходимо: (I) определить функцию $f : A \to B$, т.е. объяснить, чему равно значение $f(x)$ для любого $x \in A$; (2) доказать, что $f$ – вложение, т.е. что если $x, y \in A$, $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$; (3) доказать, что $f$ – наложение, т.е. что для любого $x \in B$ найдется такой $y \in A$, что $f(y) = x$.

Этот принцип полезен при решении предлагаемых ниже задач.

9. Доказать, что число 3-элементных подмножеств 1983-элементного множества равно числу 1980-элементных подмножеств того же множества. (Впоследствии мы найдем это число.)

I0. Каких подмножеств больше у множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ – содержащих элемент I или не содержащих элемент I ?

II.* Разобьем все подмножества данного конечного множества $A$ на 2 класса – в класс $Ч$ включим множества с четным числом элементов, в класс $H$ включим множества с нечетным числом элементов. Доказать, что $Ч$ и $H$ содержат одинаковое число элементов.

I2.* На окружности нарисованы I983 белые точки и одна черная точка. Чего больше: треугольников с белыми вершинами или 4-угольников с 3 белыми и I черной вершиной?

I3.* (Продолжение.) Чего больше – многоугольников, все вершины которых белые, или многоугольников, у которых одна вершина черная, а остальные белые?

Принцип Дирихле.

Основной принцип комбинаторики можно переформулировать так: если $|A| \neq |B|$, то не существует взаимно однозначной функции $f: A \to B$. Следующий принцип конкретизирует это утверждение.

<u>Принцип Дирихле</u>. Если $f: A \to B$ и $|A| > |B|$, то $f$ не является вложением: существуют такие $a_1 \in A$ и $a_2 \in A$, что $a_1 \neq a_2$ и $f(a_1) = f(a_2)$.

I. У человека на голове не более I50000 волос. Доказать, что в Москве (население больше 7 млн.) есть два человека с одинаковым числом волос.

2. (Продолжение.) Доказать, что есть 40 человек с одинаковым числом волос.

3.* Футбольный турнир проводится так, что каждая команда играет с каждой по одному разу. Доказать, что в любой момент турнира найдутся команды, сыгравшие равное число матчей.

4.* В клетках шахматной доски I00 на I00 написаны целые числа, причем в соседних (имеющих общую сторону) клетках числа отличаются не более чем на 20. Доказать, что на доске имеются 3 одинаковых числа.

5.* 65 конфет разделили между I2 школьниками. Доказать, что по крайней мере 2 из них получили конфет поровну (возможно, 0).

6.* Код марсианского языка сопоставляет с каждой из 40 букв марсианского алфавита последовательность из точек и тире. Доказать, что хотя бы одна буква закодирована последовательностью из 5 или более значков.

7.* Имеется 20 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что нельзя, отложив в сторону некоторые из гирь (возможно, ни одной), разделить оставшиеся на 2 кучи равного веса. Доказать, что общий вес гирь превосходит I тонну.

8.* Доказать, что существует число вида III...III000...000, делящееся на I983. Доказать, что существует число вида III...II, делящееся на I983.

9.* Доказать, что из $n+1$ числа, меньшего $2n$, всегда можно выбрать 2, одно из которых делится на другое. (Указание. Можно требовать, чтобы частное было степенью числа 2.)

I0.* В ряд выписаны $2^n$ натуральных чисел. Известно, что если выписать все простые множители всех этих чисел, то среди них будет не более $n$ различных. Доказать, что можно выбрать несколько стоящих подряд чисел так, чтобы их произведение было точным квадратом.

II.** Последовательность состоит из $mn+1$ действительного числа. Доказать, что можно зачеркнуть некоторые члены так, что останется либо возрастающая последовательность из $m+1$ числа, либо убывающая последовательность из $n+1$ числа.

I2. Двое играют в такую игру. Первый задумывает число от I до I000. Второй отгадывает это число, задавая любые вопросы, требующие ответа "да" или "нет". Придумать способ, гарантирующий отгадывание задуманного числа за I0 вопросов. Доказать, что не существует способа, гарантирующего отгадывание задуманного числа за 9 вопросов.