Комбинаторика, ч. 2 (Основные формулы. Подсчеты.)

Размещения с повторениями.

I. Докажите, что следующие множества:

(I) всех пятизначных чисел, составленных из цифр I, 2;

(2) всех подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(3) всех функций из $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ в $\{1, 2\}$;

(4) всех способов освещения коммунальной кухни, где у каждой из 5 соседок – своя лампочка;

(5) всех делителей числа $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$;

(6) всех слагаемых, получающихся при раскрытии скобок в выражении $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)(i+j)$;

– имеют одинаковое число элементов. Найдите это число.

2. Докажите, что

> если имеется набор из n различных символов, то можно составить n^k последовательностей длины k из этих символов

3. Сколько подмножеств имеет n-элементное множество?

4. Сколько существует функций $f: A \to B$, если $|A| = m$, $|B| = n$ (Напомним: $|X|$ – число элементов в X.)

Перестановки.

5. Сколькими способами можно построить группу из 7 человек в колонну по одному?

6. Докажите, что

> существует ровно $n!$ последовательностей из чисел $1, 2, \ldots, n$

(Через $n!$ обозначают произведение $1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$; считают, что $0! = 1$.)

7. Сколько существует функций $f: A \to B$, являющихся взаимно однозначными, если $|A| = m$, $|B| = n$?

8. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

Размещения без повторений.

9. Сколько существует 4-значных чисел без повторяющихся цифр (таковы, например, 0I23 и 980I)?

I0. Пусть имеется m символов. Число последовательностей из них длины n, все элементы которых различны, обозначают A_m^n.

Доказать, что $\boxed{A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \text{ при } m \geq n \text{ и } A_m^n = 0 \text{ при } m < n.}$

11. Сколько существует вложений $f: A \to B$, если $|A| = p$, $|B| = q$?

12. Рояль имеет 88 клавиш. Сколько бывает последовательностей из 6 нот? из 6 нот, в которых ни одна нота не встречается дважды?

Сочетания

13. Сколько существует четырехзначных чисел $a_1 a_2 a_3 a_4$, у которых $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$? (Указание. Из каждого такого числа можно получить 4! = 24 числа без повторяющихся цифр.)

14. Число n -элементных подмножеств m-элементного множества обозначается C_m^n. Доказать, что

$$\boxed{C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{1}{n!} A_m^n}$$

(В иностранной литературе пишут $\binom{m}{n}$ вместо C_m^n.)

Следующие две задачи можно решать либо используя исходное определение для C_m^n, либо доказанную формулу.

15.* Доказать, что $C_m^n = C_m^{m-n}$.

16.* Доказать, что $C_{m+1}^{n+1} = C_m^n + C_m^{n+1}$.

17.* Доказать, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

18. Сколько существует последовательностей из p нулей и q единиц?

19. Сколько решений в натуральных числах (включая 0) имеет система неравенств и уравнений

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ldots, \quad 0 \leqslant x_{10} \leqslant 1, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 4$$

Подсчеты.

1. Сколько существует 4-значных чисел, не все цифры которых различны?

2. Среди 7 человек есть Петров и Сидоров. Сколькими способами можно построить этих 7 человек в колонну, если нужно, чтобы Петров был впереди Сидорова?

3. (Продолжение.) ...Петров и Сидоров были рядом (в любом порядке)?

4. Сколько существует шестизначных чисел, не содержащих цифр 0 и 8 ?

5.* Сколько существует шестизначных чисел, содержащих 0 и не содержащих 8 ?

6. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$?

7.* Найти сумму всех пятизначных чисел, составленных из различных нечетных цифр (таковы, например, 13579 и 91537).

8. Сколько делителей имеет число $2^{10}\cdot 3^{15}\cdot 5^{20}$?

9.* Сколько существует различных 6-гранных игральных костей? (Две кости считаются различными, если их нельзя перепутать, как ни переворачивай их.)

10.* В каждую клетку таблицы 10 на 10 требуется вписать 1 или − 1 так, чтобы произведения всех чисел в каждом столбце и в каждой строке равнялись 1. Сколькими способами можно заполнить таблицу?

11.* Сколько существует 5-значных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в которых цифра 3 идет сразу после цифры 2?

12.* (Продолжение) ...в которых цифра 3 идет после цифры 5, но до цифры 1?

13.* (Продолжение.) ...в которых цифра 5 не стоит на 5 месте?

14.** (Продолжение.) ...в которых ни одна цифра не стоит на своём месте (т.е. не равна своему порядковому номеру)?

15.* Сколько существует подмножеств множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, содержащих (1) ровно 2 четных числа; (2) не менее двух четных чисел?

16.* Сколькими способами можно рассадить n человек за круглым столом (способы рассадки, отличающиеся поворотом, считаем одинаковыми)?

17.* Сколько существует 10-значных чисел, в которые цифры 1,2,3,...,7,8 входят по разу, а цифра 9 − дважды?

18.* Имеется 9 различных ящиков, 5 одинаковых белых шаров и 5 одинаковых черных шаров. Сколькими способами можно разместить шары в ящиках так, чтобы не было пустых ящиков?

19.* Доказать, что число последовательностей из n нулей и единиц, не содержащих двух нулей подряд, равно $n+1$ -му числу Фибоначчи a_{n+1}. (Последовательность Фибоначчи определяется так: $a_0=1$, $a_1=1$, каждый следующий член равен сумме двух предыдущих.)

20.* Пусть $|A|=m$, $|B|=n$, $S_{m,n}$ − число функций $f: A\to B$, являющихся наложениями. Доказать, что $S_{m,n}$ делится на $n!$.