Комбинаторика, ч. 3 (Треугольник Паскаля. Бином Ньютона.)

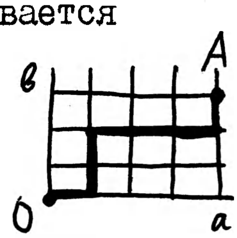
Треугольник Паскаля.

Напомним: C_m^n есть число n-элементных подмножеств m-элементного множества.

1. Доказать, что $C_m^n = C_m^{m-n}$.
2. Доказать, что $C_{m+1}^{n+1} = C_m^n + C_m^{n+1}$.
3. Доказать, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & C_0^0 & & \\
 & C_1^0 & & C_1^1 & \\
C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 \\
 & & \ldots\ldots & &
\end{array}
$$

4. Вычислите числовые значения и заполните треугольник вплоть до 6-ой строки. (При правильном подходе вычисления должны занять не более одной минуты.) Эта таблица называется треугольником Паскаля.



5. Город состоит из прямоугольных кварталов, разделенных улицами. Сколько существует кратчайших путей из точки 0 в (a, b)-ый перекресток A ?

6. Используя результат предыдущей задачи, дайте новое доказательство формулы $C_{m+1}^{n+1} = C_m^n + C_m^{n+1}$.

7. Доказать, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots \pm C_n^n = 0$.

8. Пусть $T(m,n)$ определено при $m, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \leq m$ причем выполнены свойства $T(m,0) = T(m,m) = 1$ и $T(m+1,n+1) = T(m,n+1) + T(m,n)$. Доказать, что $T(m,n) = C_m^n$

9. Пользуясь предыдущей задачей, дать новое доказательство формулы $C_m^n = m!/(n!(m-n)!)$

10.* Сколькими способами можно представить число 100 в виде суммы 3 натуральных слагаемых (порядок существен: 50 + 25 + + 25 и 25 + 50 + 25 – разные представления)? (Указание. Представьте себе 100 белых камушков, положенных в ряд. Сколькими способами можно положить среди них 2 черных камушка? Представьте себе 102 белых камушка, из которых 2 покрашены черной краской.)

11.* Доказать, что число решений в натуральных числах уравнения $x_1 + \ldots + x_k = l$ равно C_{k+l-1}^{k-1} (напоминаем: 0 мы считаем натуральным числом!).

12.* Необходимо купить 15 пирожных 5 сортов. Сколькими способами это можно сделать?

13.* Найти число решений в натуральных числах неравенства $x_1 + \ldots + x_k \leq l$.

14.* Для проведения субботника 40 учеников класса нужно разбить на 3 группы: 15 чел. в кабинет № 15, 17 – в № 34 и 8 для натирания пола в учительской. Сколькими способами это можно сделать?

I5.* (Продолжение.) Тот же вопрос, если в каждой группе нужно назначить ответственного.

I6.* Найти коэффициент при $x^{15}y^{17}z^{8}$ в $(x+y+z)^{40}$.

I7.* 700 родичей Пиро (см. А.Франс, Остров пингвинов, кн. 6, гл. 3) на 4I-ый день решили избрать из своего числа комиссию по борьбе за оправдание Пиро. При этом (для однозначности голосования) в комиссии должно быть нечетное число членов. Сколькими способами это можно сделать?

I8.* Сколько разных слов можно получить, переставляя буквы в слове "математика"?

I9.** Троллейбусный билет иногда называют "счастливым", если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех. Сколько счастливых билетов в одной серии (от 000000 до 999999) ?

<u>Бином Ньютона</u>

I. Докажите формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$$

Запишите её частные случаи, соответствующие $n = 2, 3, 4$.

2. Дайте новое доказательство равенства

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

3. Дайте новое доказательство равенства

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots \pm C_n^n = 0.$$

4. Найти сумму $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n$

5. Написать формулу для $(a-b)^n$, аналогичную формуле бинома Ньютона.

6. При каких n и k выполнено неравенство $C_n^k < C_n^{k+1}$?

7.* Доказать, что если p простое и $k \neq 1, k \neq p$ то C_p^k делится на p.

8.* Доказать, что $(a+b)^p$ дает при делении на p тот же остаток, что и $a^p + b^p$.

9.* Доказать, что $C_{n+m}^k = C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k \cdot C_m^0$.

I0.* Доказать, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

II.* Доказать, что $C_n^m + C_{n-1}^{m-1} + \ldots + C_{n-k}^{m-k} + \ldots + C_{n-m}^0 = C_{n+1}^m$

I2.* Доказать, что $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = a_n$

где a_n – n-ое число Фибоначчи (см. ч. 2, "Подсчеты", № I9).

I3.* (Аналог формулы бинома для многих слагаемых) Доказать, что в разложение $(a_1 + \ldots + a_k)^n$ член $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k}$ с $m_1 + \ldots + m_k = n$ входит с коэффициентом $n!/(m_1!\, m_2! \ldots m_k!)$.

I4.* Доказать, что произведение любых n подряд идущих натуральных чисел делится на $n!$.