Комбинаторика, ч. 4 (Разные задачи.)

I.* Рассмотрим все расстановки произвольного количества слонов на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга. Доказать, что число таких расстановок есть точный квадрат.

2.* В марсианском языке 2 буквы и любые 2 слова одинаковой длины отличаются по крайней мере в 3 местах. Доказать, что количество слов длины n в марсианском языке не превосходит $2^n/(n+1)$.

3.* Каково наибольшее число частей, на которое могут разбить плоскость n прямых?

4.** В $2n$ -элементном множестве выбрано несколько подмножеств, причем так, что ни одно из выбранных подмножеств не вложено в другое. Доказать, что общее число выбранных множеств не превосходит C_{2n}^n

5.* Найти сумму $0 \cdot C_n^0 + 1C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$.

6.* Найти сумму $C_n^0 + (1/2)C_n^1 + (1/3)C_n^2 + \ldots + (1/n+1)C_n^n$.

7.* Найти суммы $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$, $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots$.

8.* В этой задаче мы рассматриваем представления натуральных чисел в виде суммы натуральных слагаемых, не обращая внимания на порядок слагаемых. (Напомним, что мы считаем 0 натуральным числом.) Доказать, что количество представлений числа $n \geqslant 1$ в виде суммы $m \geqslant 1$ слагаемых равно количеству представлений числа n в виде суммы слагаемых, каждое из которых принимает значения от I до m.

9.** Доказать, что число способов уплаты n копеек монетами в I, 2 и 3 коп. равно ближайшему целому числу к $(n+3)^2/12$

10.** Сколькими способами можно разложить 1000000 на 3 множителя, если считать разложения, отличающиеся порядком слагаемых, (I) одинаковыми; (2) разными ?

11.** (Расположение четных и нечетных чисел в треугольнике Паскаля.) Доказать, что: (I) n -ая строка целиком состоит из нечетных чисел тогда и только тогда, когда $n+1$ есть степень 2: (2) все внутренние числа n-ой строки четны тогда и только тогда, когда n есть степень 2; (3) количество нечетных чисел в любой строке есть степень 2. (n -ой строкой называется строка $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$.)

12.* Функция Эйлера φ определяется так: для любого натурального n значение $\varphi(n)$ равно количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . Найти $\varphi(p)$, $\varphi(p^2)$, $\varphi(pq)$, если p и q - простые числа.

13.** (Продолжение.) Доказать, что если $n = p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$, где $p_1, \ldots, p_m$ – различные простые числа, то
$$\varphi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)\ldots(1 - 1/p_m).$$

I4.* На окружности выбрано 20 точек. Сколькими различными способами можно попарно соединить эти точки 10 хордами, не пересекающимися внутри окружности?

I5.**(Продолжение.) Тот же вопрос, если дано $2n$ точек и n хорд.

I6.**Сколько существует последовательностей из n нулей и n единиц, у которых любой начальный отрезок содержит не меньше единиц, чем нулей?

I7.**Круг разделен на p равных секторов (p – простое). Имеется n красок. Сколькими способами можно раскрасить круг, если каждый сектор можно выкрасить в любой цвет и раскраски, отличающиеся поворотом круга, считаются одинаковыми?

I8.**(Продолжение.) Доказать, что $n^p - n$ делится на p.

19.**Дайте другое доказательство утверждения предыдущей задачи, используя задачу 8 из Бинома Ньютона (Комбинаторика, ч. 3).

20.**Доказать, что число наложений m-элементного множества на n-элементное (при $m \geq n$) равно $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m C_n^k$

21.** Доказать, что число последовательностей из чисел I,2,..., n, в котором ни одно число не стоит на своем месте (т.е. i-ый член не равен i ни при каком i), равно
$$n!\left(1/2! - 1/3! + 1/4! - \ldots \pm 1/n!\right)$$
(Как мы увидим, это близко к $n!/e$, где $e \approx 2.71828\ldots$)