Пусть E – линейное пространство. Говорят, что функция $\langle x, y\rangle \mapsto (x, y)$ из E E в R называется скалярным произведением, если выполнены такие свойства:

(1) $(x, y) = (y, x)$ (симметрия)

(2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ (билинейность)

$(\lambda x, y) = (x, \lambda y) = \lambda(x, y)$

(3) $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ (положительная определенность)

Пространство, снабженное скалярным произведением, называется евклидовым.

1. Известные из курса школьной геометрии скалярные произведения обладают этими свойствами. Существуют ли другие скалярные произведения на плоскости и в пространстве ?

Векторы x и y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. (Запись: $x \perp y$.)

2. Известно, что вектор $x \in E$ ортогонален любому вектору пространства E. Что это за вектор ?

3. Доказать, что множество $x^\perp$ векторов, ортогональных данному вектору x, является подпространством. Доказать, что всякий вектор y из E однозначно представляется в виде суммы $y_1 + y_2$, где y_1 пропорционален x, а y_2 ортогонален x. (Векторы y_1 и y_2 можно назвать проекциями y на x и $x^\perp$.)

Нормой, или длиной, вектора x называется число $\sqrt{(x, x)}$. Обозначение: $\|x\|$.

4. Доказать, что $|(x, y)| = \|x\|\cdot\|$проекция y на x$\|$

5. Доказать теорему Пифагора: если $x \perp y$, то

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

6. Доказать, что $\|$проекция y на x$\| \leq \|y\|$

Указание: катет короче гипотенузы.

7. Доказать неравенство Коши – Буняковского – Шварца:

$$|(x, y)| \leq \|x\|\cdot\|y\|$$

Поскольку $|(x, y)| / (\|x\|\cdot\|y\|) \leq 1$, эту величину называют косинусом угла между векторами x и y (а углом считают ее арккосинус).

8. Пусть x, y – произвольные векторы. Квадратный трехчлен $t \mapsto (x + ty, x + ty)$ неотрицателен, и его дискриминант неотрицателен. Вывести отсюда неравенство предыдущей задачи.

9. Доказать неравенство треугольника $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

10. Доказать равенство параллелограмма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

11. Доказать теорему о 2 перпендикулярах: если вектор x перпендикулярен двум непропорциональным векторам y и z, лежащим в двумерной плоскости, то он перпендикулярен всем векторам этой плоскости.

12. Сформулировать и доказать теорему о 3 перпендикулярах из школьного курса геометрии в терминах евклидовых пространств.

13. (1) В евклидовом пространстве даны три вектора x, y, z единичной длины. Доказать, что $(x, y) + (y, z) + (x, z) \geq - 3/2$. (2) Доказать, что если $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geq -3/2$. (3) Доказать, что сумма косинусов углов треугольника не превосходит 3/2.

14. Доказать, что сумма косинусов двугранных углов при всех ребрах тетраэдра не превосходит 2.

15. Векторы e_1, $e_2, \ldots, e_n$ попарно ортогональны. Доказать, что они линейно независимы.

16. Рассмотрев в пространстве $C[0, 2\pi]$ непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций скадярное произведение $(f, g) = \int_0^{2\pi} fg$, доказать линейную независимость системы функций $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \sin x, \ldots, \sin nx$.

Базис, составленный из ортогональных векторов единичной длины, называется ортонормированным.

17. Доказать, что любое конечномерное пространство имеет ортонормированный базис и, более того, любой вектор единичной длины может быть дополнен до ортонормированного базиса.

Пусть L - подпространство евклидова пространства E, x - вектор из E. Вектор l из L называется (ортогональной) проекцией x на L, если $x - l$ ортогонально L (ортогонально всем векторам из L).

18. Доказать, что если L - конечномерное подпространство евклидова пространства E, то всякий вектор из E имеет единственную проекцию на L. (Указание. Каковы координаты проекции в ортонормированном базисе в L ?)

19. Существенна ли конечномерность в предыдущей задаче?

20. Доказать, что проекция x на L - ближайшая к x точка подпространства L. (Расстоянием между x и y считаем $\|x - y\|$.)

21. Пусть S - произвольное множество векторов конечномерного евклидова пространства. Доказать, что множество $S^\perp$ векторов, ортогональных всем векторам S, есть подпространство; если S - подпространство, то $E = S \oplus S^\perp$, а $(S^\perp)^\perp = S$.

22. Доказать, что любые два евклидовых пространства E_1 и E_2 одинаковой конечной размерности изоморфны, т.е. существует такой изоморфизм линейных пространств $\varphi: E_1 \to E_2$, что $(\varphi(x), \varphi(y))_{E_2} = (x, y)_{E_1}$ для всех x, y из E_1.

23. (Ортогонализация Грама – Шмидта.) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – произвольный базис евклидова пространства. Доказать, что существует ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$ того же пространства, для которого линейные оболочки $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_k$ совпадают при всех $k = 1..n$.

24. Доказать, что для всякого линейного функционала φ на конечномерном евклидовом пространстве E найдется такой вектор f, что $\varphi(x) = (x, f)$ для всех $x \in E$. Указать изоморфизм между конечномерным евклидовым пространством и сопряженным к нему.

25. (Метод наименьших квадратов.) Дано n точек плоскости $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Нужно провести прямую $y = kx$ как можно ближе к этим точкам – так, чтобы сумма $\sum (y_i - kx_i)^2$ была бы минимальной. Доказать, что эта задача всегда имеет ровно одно решение. Какое? Тот же вопрос, если нужно провести прямую $y = kx + b$ так, чтобы $\sum (y_i - (kx_i + b))^2$ была бы минимальной.

26. Доказать, что многочлены Чебышёва $P_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ортогональны в пространстве непрерывных на $[-1, 1]$ функций со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x) / \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

27. Любые 2 из n векторов евклидова пространства образуют тупой угол (их скалярное произведение меньше 0). Доказать, что после отбрасывания любого вектора получаем линейно независимую систему.

28. Нормой в линейном пространстве называется неотрицательная функция $x \mapsto \|x\|$, для которой $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Доказать, что если норма такова, что выполнено равенство параллелограмма (см. задачу 10), то существует скалярное произведение на E, при котором $\|x\|^2 = (x, x)$.

29. Назовем тригонометрическим многочленом степени n функцию

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

Доказать, что для любой непрерывной на $[0, 2\pi]$ функции наиболее близкий к ней тригонометрический многочлен степени n можно найти, положив

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx$$

(Расстояние между f и g измеряется величиной $\int_0^{2\pi} |f-g|^2$)

Числа a_k, b_k, определяемые этими формулами, называются коэффициентами Фурье функции f, а ряд $\sum a_k \cos kx + \sum b_k \sin kx$ – её рядом Фурье.

30. Доказать, что если a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции f, то $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \le \int_0^{2\pi} |f|^2$ (неравенство Бесселя).

31. Доказать, что при $n \to \infty$ левая часть неравенства Бесселя стремится к правой (равенство Парсеваля).