П. В. Сергеев

Математика в спецклассах 57-й школы

Математический анализ

Москва
Издательство МЦНМО
2008

ББК 74.262.21
С32

Сергеев П. В.
С32 Математика в спецклассах 57-й школы. Математический анализ. — М.: МЦНМО, 2008. — 159 с.
ISBN 978-5-94057-359-3

В этой книге мы представляем вниманию читателя курс математики, который был пройден учащимися класса «В» выпуска 2006 г. за четыре года, проведенные ими в стенах 57-й школы.

Каркас курса составляют тематические подборки задач — «листки». Эти задания представлены в нашей книге в хронологическом порядке и именно в том виде, в каком их получали на руки школьники — с соответствующими определениями, формулировками, комментариями.

ББК 74.262.21

ISBN 978-5-94057-359-3

Оглавление

Об этой книге

В этой книге мы представляем вниманию читателя курс математики, который был пройден учащимися одного из наших классов[1] за четыре года, проведенные ими в стенах 57-й школы. Речь пойдет о предмете, который у нас традиционно (и не совсем правильно) называется математическим анализом, а во Второй школе — спецматематикой. Следует уточнить, что в математических классах школьники обучаются алгебре (два часа в неделю), геометрии (три часа в неделю) и собственно математике как таковой (четыре часа в неделю). Опытом преподавания последнего предмета мы и хотим поделиться с нашим читателем.

Методика преподавания математики в 57-й школе подробно изложена в книгах Б. М. Давидовича [1] и [4], мы же лишь вкратце опишем основные особенности преподавания математического анализа.

Начиная с вечерней математической школы, предшествующей отбору и обучению в математических классах, с учащимися работает команда единомышленников — профессиональных математиков. В нашем случае это сотрудники и аспиранты МГУ им. М. В. Ломоносова, МИАН им. В. А. Стеклова, ИПМ им. Келдыша. Участники этой команды проводят все вечерние занятия, отбирают школьников для дальнейшего обучения в математических классах и четыре последующих года вместе со школьниками разбираются, говоря словами Петра Первого, в «хитростных искусств учении». Курс математики формируется в процессе обучения и зависит как от общего уровня класса, так и от научных интересов преподавателей. Как правило, сами преподаватели в свое время окончили нашу школу, и за годы обучения у них выработался свой стиль изложения различных математических тем. Изложенный в нашей книге курс своими основными чертами обязан А. Вайнтробу, С. Ландо и В. А. Зоричу, обучавшим математике как наших школьников, так и их преподавателей.

Каркас курса составляют тематические подборки задач — «листки». Эти задания представлены в нашей книге в хронологическом порядке и именно в том виде, в каком их получали на руки школьники — с соответствующими определениями, формулировками, комментариями.

Преподаватель — член команды — является научным руководителем для 3—4 школьников, которые на каждом занятии рассказывают ему решенные из текущего листка задачи и обсуждают с ним возни-

[1] Класс «В» выпуска 2006 года.

кающие при этом вопросы. Во время таких бесед, в 11-м классе более напоминающих обсуждение задачи на научном семинаре, и происходит основное обучение математике.

Вашему вниманию предлагается курс, разработанный командой, в которую входили: А. Елагин (МИАН им. Стеклова), Ю. Климов (ИПМ им. Келдыша), А. Корж (ИПМ им. Келдыша), А. Кузнецов (МИАН им. Стеклова), С. Мацкевич (аспирант механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова), П. В. Сергеев (57-я школа), А. Чернов (аспирант механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова), Л. Шейнман (механико-математический факультет МГУ им. Ломоносова). Отдельные лекции и занятия по отдельным темам были проведены М. Белкиным (University of Chicago), М. Богуславским и Е. Богуславской (Amsterdam University), Ю. Ковчеговым (University of New York) и А. Шенем (НМУ).

Особую благодарность хочется выразить нашим учителям алгебры и геометрии: Л. Д. Альтшулеру, Р. К. Гордину и Б. М. Давидовичу, оказавшим неоценимую помощь как при составлении курса, так и при обучении в целом.

Отметим, что всеми улучшениями мы обязаны вышеуказанным математикам, в то время как все недостатки целиком и полностью остаются на совести авторов.

Заинтересовавшийся читатель может продолжить изучение вопроса с помощью замечательных книг А. Шеня [2], В. Доценко [3] и вышеупомянутой книги Б. М. Давидовича [1], где изложены иные подходы к преподаванию математики в 57-й школе, имеющие другую «генеалогию».

Примечание. Знаком $*$ отмечаются дополнительные задачи и дополнительные листки. Это не обязательно более сложные задачи, это те задачи, пропустив которые можно, тем не менее, овладеть курсом в целом.

Литература

1. *Давидович Б. М., Пушкарь П. Е., Чеканов Ю.В.* Математика в 57 школе. М.: МЦНМО, ЧеРо, 1998.
2. *Шень А.* Задачи по математике. МЦНМО, 2000.
3. *Доценко В. В.* Задачи по математике 2002—2004. МЦНМО, 2004.
4. *Давидович Б. М., Пушкарь П. Е., Чеканов Ю.В.* Математика в 57-й школе. Четырехгодичный курс. М.: МЦНМО, 2008.

Вечерняя математическая школа

1. Первое занятие
(3 октября 2001 г.)

Задача 1. Какая из дробей больше: $\frac{29}{73}$ или $\frac{291}{731}$?

Задача 2. Дано число $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 56\cdot 57$.

(а) Какая последняя цифра этого числа?

(б) Каковы десять последних цифр этого числа?

Задача 3. Рейс 608 «Аэрофлота» вылетает из Москвы в 12:00, а прилетает в Бишкек в 18:00. Обратный рейс 607 вылетает в 8:00, а прилетает в 10:00. Сколько времени длится полет?

Задача 4. В строчку написано 37 чисел так, что сумма любых шести подряд идущих чисел равна 29. Первое число 5. Каким может быть последнее число?

Задача 5. Двое лыжников шли с постоянной скоростью 6 км/ч на расстоянии 200 метров друг от друга. Потом они стали подниматься в большую горку, и скорость упала до 4 км/ч. Потом оба лыжника съехали с горки со скоростью 7 км/ч и попали в глубокий снег, где их скорость стала всего 3 км/ч. Каким стало расстояние между ними?

Задача 6. У кассира есть только 72-рублевые купюры, а у вас — только 105-рублевые (у обоих в неограниченном количестве).

(а) Сможете ли вы уплатить кассиру один рубль?

(б) А три рубля?

Задача 7. За круглым столом сидят 33 представителя четырех племен: люди, гномы, эльфы и гоблины. Известно, что люди не сидят рядом с гоблинами, а эльфы не сидят рядом с гномами. Докажите, что какие-то два представителя одного и того же племени сидят рядом.

2. Принцип Дирихле
(10 октября 2001 г.)

Принцип Дирихле. Если в 100 клетках сидит 101 кролик, то хотя бы в одной клетке находится не меньше двух кроликов.

Задача 1. Какое самое большое число ладей можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

Задача 2. Занятия Вечерней математической школы проходят в девяти аудиториях. Среди прочих, на эти занятия приходят 19 учеников из одной и той же школы.

а) Докажите, что, как их не пересаживай, хотя бы в одной аудитории окажется не меньше трех таких школьников.

б) Верно ли, что в какой-нибудь аудитории обязательно окажется ровно три таких школьника?

Задача 3. На плоскости нарисовано 12 прямых, проходящих через точку O. Докажите, что можно выбрать две из них так, что угол между ними будет меньше 17°.

Задача 4. Можно ли найти 57 таких двузначных чисел, чтобы сумма никаких двух из них не равнялась 100?

Задача 5. На поле 10×10 для игры в «Морской бой» стоит один четырехпалубный корабль. Какое минимальное число выстрелов надо произвести, чтобы наверняка его ранить?

Задача 6. На всех ребрах куба стоит по числу. На каждой грани (квадрате) пишется сумма четырех чисел, расположенных на ее ребрах (сторонах квадрата). Расставьте числа 1 и -1 на ребрах так, чтобы все числа на гранях были различны.

Задача 7. Координационный совет межпартийного движения «Наш дом — Россия» собирался 40 раз, притом никакие два участника не могли переносить друг друга более одного заседания. Тем не менее на каждом собрании присутствовало ровно 10 человек. Докажите, что в Совете больше 60 членов.

Задача 8. На плоскости отмечена точка O. Можно ли так расположить на плоскости

(а) 5 кругов, (б) 4 круга,

не покрывающих точку O, чтобы любой луч с началом в точке O пересекал не менее двух кругов? (Под кругом в этой задаче имеется в виду круг без граничной окружности.)

Задача 9. Картографы планеты Утопия отметили 10 000-й год от заселения планеты колонистами составлением ее глобуса. Глобус обклеивали кусочками, заключающимися между соседними (через 1 градус) параллелями и такими же меридианами. При этом оказалось, что более половины таких кусочков приходится на океан.

(а) Докажите, что им удастся надеть свой глобус на тонкий стержень так, чтобы не задеть сушу.

(б) Сколько трех- и четырехугольных кусочков наклеили картографы?

3. Третье занятие
(17 октября 2001 г.)

Задача 1. Пусть длина ребра тетраэдра равна 1 см (см. рис. 1). Можно ли согнуть его каркас из куска проволоки длиной 6 см?

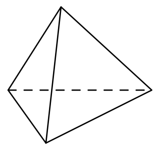

Рис. 1

Задача 2. Один тетраэдр поставили на другой такой же (соединив по грани). Сколько сантиметров проволоки потребуется, чтобы согнуть каркас этой фигуры? Можно ли сделать так, чтобы проволока не проходила ни по одному ребру дважды?

Задача 3. Верхнюю и нижнюю вершину нашей новой фигуры покрасили в красный, а остальные — в синий цвет. Разрешается взять произвольное ребро и перекрасить его вершины в противоположный цвет. Можно ли добиться того, чтобы все вершины стали

(а) синими; (б) красными?

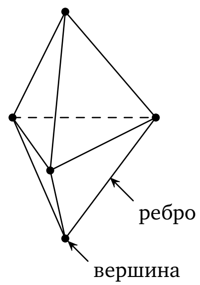

Рис. 2

Задача 4. Боря и Миша придумали новую игру. Они сварили каркас тетраэдра из металлических прутьев и стали по очереди распиливать прутья посередине. Тот, после чьего хода каркас развалится на две части, проигрывает. Миша ходит первым. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 5. Испортив тетраэдр, Боря с Мишей стали пилить куб из прутьев. Кто выиграет на этот раз?

Задача 6. Покончив с кубом, они пошли гулять по городу. (Город состоит из улиц, перекрестков и площадей.) Вечером они решили вернуться домой и при этом идти только по тем улицам, по которым до этого прошли нечетное число раз. Докажите, что они смогут так сделать.

Задача 7 (дополнительная). К первым двум фразам известного романа применили алгоритм «С+7» на основе «Словаря русского языка» Ожегова и получили такой текст.

Зовите меня изморозью. Несколько голеней тому назад — когда именно неважно — я обнаружил, что в кошмаре у меня почти не осталось депутатов, а на земстве не осталось ничего, что могло бы еще занимать меня, и тогда я решил сесть на корейку, чтобы поглядеть на мироеда и с его водного стража.

Что такое алгоритм «С+7»?

4. Логика и логики
(24 октября 2001 г.)

Задача 1. Известно, что среди членов правительства Лимонии (а всего в нем 20 членов) заведомо имеется хотя бы один честный, а также что из любых двух хотя бы один — взяточник. Сколько в правительстве взяточников?

Задача 2. Трое сумасшедших маляров принялись красить пол каждый в свой цвет. Один успел закрасить красным 75 % пола, другой — зеленым 70 %, третий — синим 65 %. Какая часть пола заведомо закрашена всеми тремя красками?

Задача 3. Государство Диполия населено лжецами и рыцарями, причем лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Путешественник едет по этой стране в сопровождении официального гида и знакомится с другим жителем. «Вы, конечно, рыцарь?» — спрашивает он. Туземец его понимает и отвечает «Ырг», что означает то ли «да», то ли «нет». На просьбу перевести гид говорит: «Он сказал — да. Добавлю, что на самом деле он лжец». А вы как думаете?

Задача 4. В некотором царстве живут маги, чародеи и волшебники. Про них известно следующее: во-первых, не все маги являются чародеями, во-вторых, если волшебник не является чародеем, то он не маг. Правда ли, что не все маги — волшебники?

Задача 5. Путешественник, попавший в государство из задачи 3, встретил компанию из четырех местных жителей и задал им вопрос: «Кто вы?». Он получил такие ответы:

1-й: «Все мы лжецы».

2-й: «Среди нас 1 лжец».

3-й: «Среди нас 2 лжеца».

4-й: «Я ни разу не соврал и сейчас не вру».

Путешественник быстро сообразил, кем является четвертый житель. Как он это сделал?

Задача 6. На международный конгресс приехало 578 делегатов из разных стран. Любые трое делегатов могут поговорить между собой без помощи остальных (при этом возможно, что одному из них придется переводить разговор двух других). Докажите, что всех делегатов можно поселить в двухместных номерах гостиницы таким образом, чтобы любые двое, живущие в одном номере, могли разговаривать между собой.

5. Часы с кукушкой

(31 октября 2001 г.)

Задача 1. Когда мальчик Клайв подошел к дедушкиным настенным часам с кукушкой, на них было 12 часов 5 минут. Клайв стал крутить пальцем минутную стрелку, пока часовая не вернулась на прежнее место. Сколько «ку-ку» насчитал за это время дедушка в соседней комнате?

Задача 2. а) Сколько раз за это время минутная стрелка совпала с часовой?

б) В какие моменты это происходило?

Задача 3. Стоя в углу, Клайв разобрал свои наручные часы, чтобы посмотреть, как они устроены. Собирая их обратно, он произвольно надел часовую и минутную стрелки. Сможет ли он так повернуть циферблат, чтобы хоть раз в сутки часы показывали правильное время (часы при этом еще и не заведены)?

Задача 4. После того как Клайв собрал и завел свои часы (поставив их по дедушкиным), они стали идти в обратную сторону. Сколько раз в сутки они покажут правильное время?

Задача 5. Очень скучно смотреть на черно-белый циферблат, поэтому Клайв ровно в полдень закрасил число 12 красным цветом, и решил через каждые 57 часов закрашивать текущий час в красный цвет.

(а) Сколько чисел на циферблате окажутся покрашенными?

(б) Сколько окажется красных чисел, если Клайв будет красить их каждый 1913-й час?

Задача 6. Когда Клайв поступил в математическую школу, ему подарили новые часы, на которых была еще секундная стрелка. Сколько раз за сутки все три стрелки на таких часах совпадут?

Задача 7*. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) биссектриса BD в два раза короче биссектрисы AE. Найдите углы треугольника ABC.

6. На шахматной доске

(14 ноября 2001 г.)

Задача 1. На шахматном поле на каждой клетке стоит шашка, с одной стороны белая, с другой черная. За один ход можно выбрать любую шашку и перевернуть все шашки, стоящие на одной вертикали, и все шашки, стоящие на одной горизонтали с выбранной.

(а) Придумайте, как перевернуть ровно одну шашку на поле 6×6, произвольно уставленном шашками.

(б) Придумайте, как добиться того, чтобы все шашки на поле 5×6 стали белыми, если черными изначально была ровно половина шашек.

Задача 2. (а) Какое максимальное количество слонов можно расставить на доске 1000×1000 так, чтобы они не били друг друга?

(б) Какое максимальное количество коней можно расставить на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

Задача 3. 25 жуков сидят по одному на клетках доски 5×5. По хлопку в ладоши каждый из них переползает на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку. Доказать, что после хлопка хотя бы одна из клеток будет свободна.

Задача 4. (а) Из обычной шахматной доски 8×8 вырезали клетки $c5$ и $g2$. Можно ли то, что осталось, замостить доминошками 1×2?

(б) Тот же вопрос, если вырезали клетки $c6$ и $g2$.

Задача 5. В нижнем левом углу шахматной доски 8×8 стоит фишка. Двое по очереди передвигают ее на одну клетку вверх, вправо или вправо-вверх по диагонали. Выигрывает тот, кто поставит фишку в правый верхний угол. Кто победит при правильной игре?

Задача 6. Доказать, что в игре в «крестики-нолики» на поле 3×3 при правильной игре первого игрока второй игрок не может выиграть.

Задача 7. Доказать, что конь может обойти шахматную доску размером 2001×2001, побывав на каждом поле ровно по одному разу.

7. Точки, клетки и треугольники
(21 ноября 2001 г.)

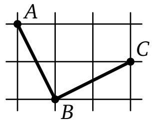

Рис. 1

Задача 1. Найдите угол ABC (см. рис. 1).

Задача 2. Можно ли отметить на плоскости

(а) четыре точки так, чтобы расстояние между любыми двумя из них было равно одному сантиметру;

(б) шесть точек так, чтобы у каждой было ровно по три соседа на расстоянии 1 см?

Задача 3. Разрежьте первый треугольник на части, из которых можно сложить второй (см. рис. 2).

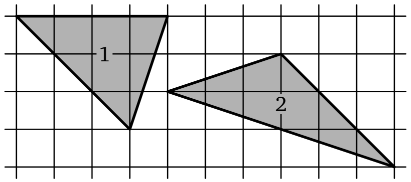

Рис. 2

Задача 4. Сравните отрезки: (а) AB и CD; (б) KL и MN.

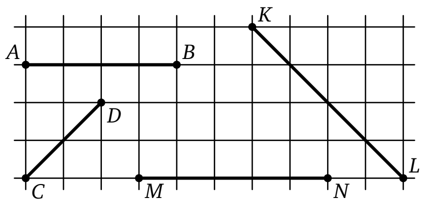

Рис. 3

Задача 5. Докажите, что площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность, в два раза меньше площади правильного шестиугольника, вписанного в такую же окружность.

Задача 6. Клетки на клетчатой бумаге называются соседними, если они имеют общую вершину или общую сторону. Можно ли закрасить

(а) бесконечное, (б) конечное

количество клеток так, чтобы у каждой из закрашенных было ровно пять закрашенных соседей?

Задача 7. Докажите, что любой тупоугольный треугольник можно разрезать на остроугольные треугольники.

Задача 8*. Докажите, что минимальное число необходимых для этого (см. предыдущую задачу) остроугольных треугольников равно 7.

8. Про мунгу и граммы
(28 ноября 2001 г.)

Задача 1. Лена и Ира покупали на рынке виноград. Когда взвешивали Ленину покупку, весы показывали два килограмма, когда Ирину — то три. Потом они вместе положили свой виноград на весы, и стрелка остановилась на 4,5 кг. Сколько на самом деле весили их покупки?

Задача 2. (а) Есть 10 монет. Известно, что одна из них фальшивая (по весу тяжелее настоящих). Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету?

(б) Как определить фальшивую монету за три взвешивания, если монет 27?

Задача 3. (а) Можно ли разложить 20 монет достоинством в 1, 2, 3, …, 19, 20 мунгу по трем карманам так, чтобы в каждом кармане оказалась одинаковая сумма денег?

(б) А если добавить еще один тугрик? (Как известно, один тугрик равен ста мунгу.)

Задача 4. Фальшивомонетчик Вася изготовил четыре монеты достоинством 1, 3, 4, 7 квачей, которые должны весить 1, 3, 4, 7 граммов соответственно. Но одну из этих монет он сделал некачественно — с неправильным весом. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирек определить «неправильную» монету?

Задача 5. Известно, что среди нескольких монет имеется ровно одна фальшивая (отличается по весу от настоящих). С помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определите, легче или тяжелее фальшивая монета настоящей (находить ее не надо), если монет

(а) 100; (б) 99; (в) 98.

Задача 6. Фальшивомонетчик Вася стал выпускать золотые слитки. Сделав пять таких слитков, он замерил веса каждой пары. Получились величины в 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 и 121 унцию. Сколько весит каждый брусок?

Задача 7. На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фартингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу на одну монету больше, чем заплатил. Какой наименьшей цены могла быть покупка?

9. Турниры
(5 декабря 2001 г.)

Задача 1. В чемпионате России по футболу участвуют 16 команд. Каждая команда играет с каждой из остальных по 2 матча.

(а) Сколько матчей за сезон должен сыграть «Уралан»?

(б) Сколько всего матчей играется за один сезон?

Задача 2. Трое друзей играли в шашки. Один из них сыграл 25 игр, а другой — 17 игр. Мог ли третий участник сыграть

(а) 34; (б) 35; 56 игр?

Задача 3. Сборная России по футболу выиграла у сборной Туниса со счетом 9 : 5. Докажите, что по ходу матча был момент, когда сборной России оставалось забить столько голов, сколько уже забила сборная Туниса.

Задача 4. А. К., В. К. и Г. К. провели между собой турнир по шахматам, причем каждый сыграл с каждым одно и то же число партий. Могло ли случиться так, что первый игрок занял первое место по числу побед и последнее — по числу набранных очков, а третий игрок занял последнее место по числу побед и первое — по числу набранных очков (за победу дается 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0 очков)?

Задача 5. Учащиеся 57-й школы решили провести чемпионат по мини-футболу. Так как на школьном дворе ворота разного размера, то игроки хотят составить расписание игр так, чтобы:

1) каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу;

2) каждая команда чередовала свои игры — то на плохой стороне, то на хорошей стороне двора.

(а) Удастся ли это сделать, если в турнире принимают участие 10 команд?

(б) Можно ли при этом составить расписание так, чтобы каждый день каждая команда играла ровно одну игру?

Задача 6*. Теннисист для тренировки играет каждый день хотя бы одну партию; при этом, чтобы не перетрудиться, он играет не более 12 партий в неделю. Докажите, что можно найти несколько таких подряд идущих дней, в течение которых теннисист сыграл ровно двадцать партий.

10. Новогоднее занятие
(19 декабря 2001 г.)

Задача 1. Назовем натуральное число *изумительным*, если оно имеет вид $a^b + b^a$. Например, число 57 — изумительное, так как $57 = 2^5 + 5^2$. Является ли изумительным число 2002?

Задача 2. В течение года цены на штрудели два раза поднимали на 50%, а перед Новым годом их стали продавать за полцены. Сколько стоит сейчас один штрудель, если в начале года он стоил 80 рублей?

Задача 3. Федя К. вышел из некоторой точки, прошел 1 км на север, затем — 1 км на восток, затем — 1 км на юг и вернулся в исходную точку.

(а) Где такое могло произойти?

(б) Найдите все такие точки на Земле.

Задача 4. В Трансильвании живут беспартийные (которые всегда говорят правду) и члены одной единственной партии (которые всегда лгут). Кроме того, половина трансильванцев не в своем уме, и считает все истинные утверждения ложными и наоборот. Как с помощью одного вопроса (допускающего ответ «да-нет») выяснить:

(а) в своем ли уме ваш собеседник из Трансильвании;

(б) является ли он членом партии?

Задача 5. Является ли число

$$102\,030\,405\,060\,708\,090\,807\,060\,504\,030\,201$$

квадратом какого-нибудь целого числа?

Задача 6. Существует ли треугольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги, каждая сторона которого длиннее 100 клеточек, а площадь меньше площади одной клеточки?

Задача 7. Вот пример «снежного кома» на английском языке: I do not know where family doctors acquired illegibly perplexing handwriting; nevertheless, extraordinary pharmaceutical intellectuality, counterbalancing indecipherability, transcendentalizes intercommunications' incomprehensibleness. Приведите пример осмысленного снежного кома на русском языке.

Задача 8*. Большой, зеленый, живет под землей и питается камнями. Кто это?

11. Путешествия
(16 января 2002 г.)

Задача 1. В Старой Калитве живет 50 школьников, а в Средних Болтаях — 100 школьников. Где нужно построить школу, чтобы сумма расстояний, проходимых всеми школьниками, была наименьшей?

Задача 2. В Москве живет 2000 скалолазов, в Санкт-Петербурге и Красноярске — по 500, в Екатеринбурге — 200, а остальные 100 рассеяны по территории России. Где нужно устроить чемпионат России по скалолазанию, чтобы транспортные расходы участников были минимальны?

Задача 3. Вадим и Леша спускались с горы. Вадим шел пешком, а Леша съезжал на лыжах в семь раз быстрее Вадима. На полпути Леша упал, сломал лыжи и ногу и пошел в два раза медленней Вадима. Кто первым спустился с горы?

Задача 4. Из поселка Морозки ведет прямая дорога, в стороне от нее, на поле, расположена водокачка (см. рис. 1). Путнику нужно попасть из Морозок к водокачке. По дороге путник идет со скоростью 4 км/ч, а по полю — 3 км/ч. Как ему следует выбрать маршрут, чтобы дойти быстрее всего?

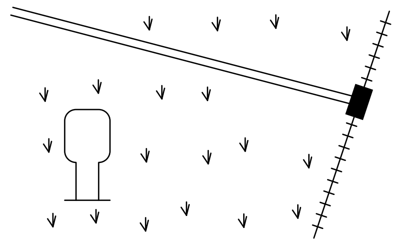

Рис. 1

Задача 5. Выйдя на маршрут в 4 часа утра, альпинист Джеф Лоу к вечеру достиг пика «Свободная Корея». Переночевав на вершине, на следующий день он вышел в то же время и быстро спустился обратно по пути подъема. Докажите, что на маршруте есть такая точка, которую Лоу во время спуска и во время подъема проходил в одно и то же время суток.

Задача 6. При организации экспедиции на Эверест участниками было установлено четыре высотных лагеря (не считая базового), на расстоянии дня пути друг от друга, после чего все спустились вниз. Пересчитав запасы, руководитель решил, что надо занести еще один баллон кислорода в четвертый лагерь, а потом всем опять вернуться вниз на отдых. При этом каждый участник 1) может нести вверх не больше трех баллонов, 2) сам тратит в день ровно один баллон кислорода. Какое наименьшее количество баллонов придется взять из лагеря для достижения поставленной цели? (Оставлять баллоны можно только в лагерях.)

12. Олимпиада
(23 января 2002 г.)

Задача 1. На книжной полке стоит трехтомник. Толщина каждого тома 3,5 см. Книжный червяк прополз от первой страницы первого тома до последней страницы последнего тома (по прямой линии). Какой путь он проделал? Толщиной обложки и червяка пренебречь.

Задача 2. Антон, Лёша и Стёпа решили покататься на лыжах. Антон идёт на лыжах в три раза быстрее Стёпы, а Лёша в два раза быстрее Стёпы. В начале пути Антон шёл первым, Стёпа — вторым, а Лёша — третьим. Через два часа пути Антон оглянулся и, никого не увидев, стал ждать остальных. Через час после начала пути Лёше надоело идти за Стёпой, и он попросил Стёпу пропустить его вперёд. Дойдя до Антона, он остановился. Сколько времени будет мерзнуть Лёша, дожидаясь Стёпу?

Задача 3. Десятичная запись числа 5A состоит из 1000 пятерок и 1000 шестерок. Найдите сумму цифр числа A.

Задача 4. Из Ливерпульской гавани в Бразилию раз в два дня отходят суда. Каждое такое судно плывёт в Бразилию целое число суток и потом сразу же возвращается назад. Пассажир, плывущий из Ливерпуля в Бразилию, за всё время поездки видит 13 судов, возвращающихся в Ливерпуль. Найдите расстояние между Ливерпулем и Бразилией, если каждое судно имеет скорость 30 км/ч.

Задача 5. Группа альпинистов штурмует стену Лхоцзе высотой 1000 м. После ночевки в базовом лагере у подножья они могут подниматься, провешивая веревки, со скоростью 40 м/ч, а после ночевки на стене — со скоростью 30 м/ч. По провешенным веревкам альпинисты поднимаются со скоростью 400 м/ч. За какое минимальное число дней можно подняться на вершину, если работать по 6 ч в день? (Временем спуска и прочим пренебречь.)

Задача 6. Ване понадобилось купить 7 шариковых ручек. В магазине, куда он пришел, были ручки четырех сортов: ручки простые, ручки обычные, ручки обыкновенные и ручки без стержня. Сколькими способами мог Ваня осуществить покупку?

13. Конструкции

(30 января 2002 г.)

Задача 1. Из 12 спичек сложены 4 квадрата (см. рис. 1), сторона квадрата равна 1 спичке.

(а) Переложите четыре спички так, чтобы получилось три квадрата.

(б) Переложите три спички так, чтобы получилось три квадрата.

(в) Переложите спички так, чтобы получилось шесть квадратов.

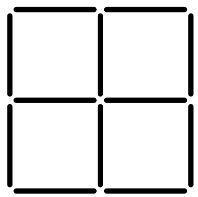

Рис. 1

Задача 2. На доске нарисованы все пять топологически неэквивалентных связных фигур из четырех спичек. Нарисуйте все связные топологически неэквивалентные фигуры из пяти спичек. (Определений мы не приводим из-за того, что они очень длинные и сложные.)

Задача 3. В музее Гугенхайм в Нью-Йорке есть скульптура, имеющая форму куба. Жук, севший на одну из вершин, хочет как можно быстрее осмотреть скульптуру, чтобы перейти к другим экспонатам (для этого ему достаточно попасть в противоположную вершину куба). Какой путь ему выбрать?

Задача 4. Веня и Сеня стали играть в обычные крестики-нолики 3×3 по обычным правилам, но с той разницей, что каждый игрок может поставить что хочет: хочет крестик, а хочет — нолик. (Выигрывает тот, кто закроет тройку одинаковых символов.) Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 5. Один древний правитель приказал построить себе дворец из десяти башен, соединенных между собой стенами. Стены должны были тянуться пятью прямыми линиями, с четырьмя башнями на каждой линии. Архитектор разработал план (см. рис. 2), но правитель остался недоволен: ведь при таком расположении можно извне подойти к любой башне. Можно ли построить дворец так, чтобы если не все, то хотя бы две башни были защищены стеной от вторжения извне?

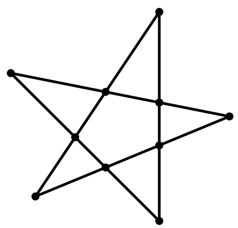

Рис. 2

14. Лингвистика

(5 февраля 2002 г.)

Задача 1. Даны русские слова: *люк, яр, ель, лён, лезь*. Определите, что получится, если звуки, из которых состоят эти слова, произнести в обратном порядке.

Задача 2. Здесь даны глагольные формы старописьменного японского языка с переводами на русский язык:

тасукэдзарубэкарики	он не должен был помогать
тасукэдзарураси	он, наверно, не помогал
тасукэрарэсикаба	если бы ему помогали
тасукэсасэрарэкэри	его заставляли помогать (давно)
тасукэсасэки	он заставлял помогать
тасукэрарэтарики	ему помогли
тасукэтакарикэри	он хотел помогать (давно)

(а) Переведите на русский язык: тасукэсасэрарэдзарубэкарисикаба.

(б) Переведите на старописьменный японский язык: ему помогали (давно); если бы он хотел помогать; его, наверно, не заставляли помогать; он помог.

Задача 3. Перед вами зашифрованный русский текст.

```
1 2+3+4+5, 6+4+6 7+8+9+4+10+11 2+4+12+4+13+14. 1 15+6+16+7+16
7+8+9+14 8+8. 6+10+16 7+8+9+4+8+10 2+4+12+4+13+17
15+6+16+7+8+8, 10+16+10 7+8+9+17+10 18+16+19+11+9+8
2+4+12+4+13. 2+4 6+4+20+12+14+5 7+8+9+8+3+3+14+5
2+4+12+4+13+14 2+4+13+17+15+19+1+5+10+15+1 16+13+6+17.
```

Расшифруйте его, если известно, что каждой букве соответствует одно число, причем разным буквам соответствуют разные числа (е и ё считаются одной буквой); зашифрованные буквы в пределах одного слова разделяются плюсами; знаки препинания в тексте сохраняются.

Задача 4. В одной европейской стране на дверях часто написано слово *ŤАНАŤ*. Однако его никогда не пишут на стеклянных дверях. Как вы думаете, что оно означает? В какой части Европы находится эта страна?

Задача 5. Даны польские слова и их переводы на русский язык в измененном порядке:

niewola, niedola, nielad, wieko, pieklo, lekarz, wieprz, strzelba, lud, krzeslo;

ружьё, врач, ад, тяжелая участь, стул, боров, народ, рабство, крышка, беспорядок.

Найдите перевод каждого слова.

Задача 6. Даны пословицы на курдском языке и их переводы на русский язык:

Дэрд дэрд дьзэ	Нужда рождает нужду
К'эсиб дэрде к'эсиб дьхунэ	Бедняк понимает нужду бедняка
Гае qэлп баре гьран нагьртэ	Ленивый бык не берет тяжелую ношу
Шер гоште шер нахwэ, шер гоште га дьхwэ	Лев не ест мясо льва, лев ест мясо быка
Ч'э'ве к'ор саг' дьбэ, дьле qэлп саг' набэ	Слепой глаз становится здоровым, ленивое сердце не становится здоровым

Переведите на курдский язык:

(а) ленивый лев ест мясо;

(б) здоровый бедняк берет ношу;

(в) бык бедняка не понимает бедняка.

Примечание. г', к', ч', q, w — особые согласные звуки, *э', э, ь* — особые гласные звуки курдского языка.

15. Странные игры
(12 февраля 2002 г.)

Задача 1. На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая ее по столу через ребро, добиться того, чтобы она оказалась на прежнем месте, но

(а) рубашкой вверх; (б) рубашкой вниз и вверх ногами?

Задача 2. Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг в друга снежками не кидали.

Задача 3. Из набора домино выкинули все доминошки, содержащие хотя бы на одном из концов шестерку. Можно ли оставшиеся доминошки выложить в цепочку (в соответствии с правилами игры)?

Задача 4. С помощью волшебного банкомата можно поменять любую купюру на любое конечное число купюр меньшего достоинства. Получив 1000 франков одной бумажкой, сможете ли вы каждый месяц платить квартплату? (Дело происходит в Швейцарии, где квартплата постоянна, а жизнь бесконечна.)

Определение 1. Среднее арифметическое двух чисел — это половина их суммы. Среднее гармоническое чисел a и b — это такое число c, что $1/c$ есть среднее арифметическое чисел $1/a$ и $1/b$.

Задача 5. На доске написаны числа 1 и 2. Каждый день научный консультант Выбегалло заменяет два написанных числа на их среднее арифметическое и среднее гармоническое.

(а) Однажды одним из написанных чисел (каким — неизвестно) оказалось $941\,664/665\,857$. Каким в этот момент было другое число?

(б) Будет ли когда-нибудь написано число $35/24$?

Задача 6. Среди 300 учеников одной математической школы некоторые путают лево и право, некоторые не путают, а некоторые делают все наоборот. Первого сентября всех учеников выстроили в одну шеренгу (плечом к плечу) и скомандовали «нале-во!» По этой команде все одновременно повернулись на 90°, — кто налево, а кто направо. Ровно через секунду каждый, кто оказался лицом к лицу к соседу, понимает, что не прав, и поворачивается кругом (на 180°). Как долго это может продолжаться?

16. Стереометрия
(19 февраля 2002 г.)

Задача 1. Маленький беленький мячик видит кошмарный сон: он один в большой белой комнате, в которой ничего и никого нет, кроме большого белого мяча, который хочет его задавить. Может ли маленький беленький мячик спастись?

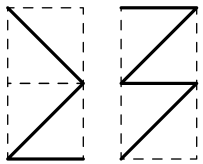

Рис. 1

Задача 2. На рисунке 1 изображено два вида сбоку маршрута рыбки, плавающей в аквариуме. Нарисуйте вид сверху.

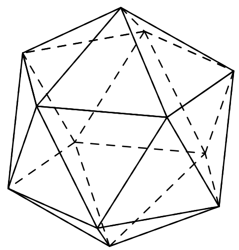

Рис. 2

Задача 3. За какое минимальное число разрезов можно плоским ножом разделить куб 3×3 на кубики 1×1?

Задача 4. Если соединить центры соседних граней куба отрезками, то получится *двойственная* кубу фигура, называемая *октаэдром*.

(а) Что получится, если соединить центры соседних граней правильного октаэдра?

(б) На рис. 2 изображен *икосаэдр*. Сколько вершин, ребер и граней у двойственного ему многогранника (он называется *додекаэдром*)?

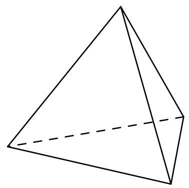

Рис. 3

Задача 5. На сколько частей разделят пространство плоскости, проходящие через грани (а) куба, (б) тетраэдра (см. рис. 3), (в) икосаэдра?

Задача 6. Разрежьте правильный тетраэдр на четыре правильных тетраэдра и октаэдр.

Задача 7* (дополнительная задача для продвинутых). Можно ли закрыть маленькую лампочку четырьмя шарами так, чтобы свет от нее не выходил наружу?

17. Step by step
(26 февраля 2002 г.)

Задача 1. Женя не успел влезть в лифт на первом этаже дома и решил пойти по лестнице. На третий этаж он поднимается за 2 минуты. Сколько времени у него займет подъем до девятого этажа.

Задача 2. Ковровая дорожка покрывает лестницу из 9 ступенек. Длина и высота лестницы равны 2 метрам. Хватит ли этой ковровой дорожки, чтобы покрыть лестницу из 10 ступенек длиной 3 и высотой 1 метр?

Задача 3. (а) Леша поднимается по лестнице из 10 ступенек. За один раз он прыгает вверх либо на одну ступеньку, либо на две ступеньки. Сколькими способами Леша может подняться по лестнице?

(б) При спуске с той же лестницы Леша перепрыгивает через некоторые ступеньки (может даже через все 10). Сколькими способами он может спуститься по этой лестнице?

Задача 4. Антон сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он решил пробежать вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал, спускаясь вместе с милиционером по неподвижному эскалатору?

Задача 5. Рома и Витя ехали вниз по эскалатору. Посередине эскалатора хулиган Витя сорвал с Ромы шапку и бросил её на встречный эскалатор. Энергичный Рома побежал обратно вверх по эскалатору, чтобы затем спуститься вниз и вернуть шапку. Хитрый Витя побежал по эскалатору вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Ромы. Кто успеет раньше, если скорости ребят относительно эскалатора одинаковы, постоянны и не зависят от направления движения?

Задача 6. По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается. Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? (Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причём скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека относительно эскалатора всегда больше скорости эскалатора.)

18. Раскраски

(7 марта 2002 г.)

Задача 1. (а) Раскрасьте рисунок в четыре цвета так, чтобы соседние части были покрашены в разные цвета.

(б) Можно ли обойтись тремя цветами?

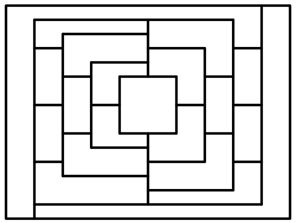

Рис. 1

Задача 2. Раскрасьте клетки квадрата 4×4 в черный и белый цвета так, чтобы у каждой чёрной клетки было три белых соседа, а у каждой белой клетки был ровно один чёрный сосед. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

Задача 3. В квадрате 7×7 закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по три закрашенных клетки.

Задача 4. Каждую грань кубика разбили на четыре равных квадрата и раскрасили эти квадраты в три цвета так, чтобы квадраты, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета. Докажите, что в каждый цвет покрашено по 8 квадратиков.

Задача 5. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что найдётся отрезок, оба конца и середина которого покрашены в один и тот же цвет.

Задача 6. Плоскость раскрашена в два цвета, причем каждый цвет использован.

(а) Докажите что найдутся две точки *одного* цвета, расстояние между которыми равно 2006 м.

(б) Докажите, что найдутся две точки *разного* цвета, расстояние между которыми также равно 2006 м.

19. Нитки, ножницы, ластик

(13 марта 2002 г.)

Задача 1. Представьте, что куб стоит на столе на одной своей вершине (так, что верхняя вершина расположена точно над нижней) и освещен прямо сверху. Какая в этом случае получается тень от куба?

Задача 2. В доску вбито 20 гвоздиков (см. рис. 1). Расстояние между любыми соседними равно 1 дюйму. Натяните нитку длиной 19 дюймов от первого гвоздика до второго так, чтобы она прошла через все гвоздики.

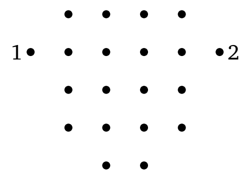

Рис. 1

Задача 3. Разрежьте квадрат на два равных

(а) пятиугольника, (б) шестиугольника.

Задача 4. На прозрачном столе стоит куб $3 \times 3 \times 3$, составленный из 27 одинаковых кубиков. Со всех шести сторон (спереди, сзади, слева, справа, сверху, снизу) мы видим квадрат 3×3. Какое наибольшее число кубиков можно убрать так, чтобы со всех сторон был виден квадрат 3×3 и при этом оставшаяся система кубиков не разваливалась?

Задача 5. На плоскости даны 9 точек (см. рис. 2). Перечеркните их все четырьмя прямыми отрезками, не отрывая карандаша от бумаги.

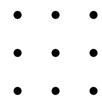

Рис. 2

Задача 6. На плоскости даны 16 точек (см. рис. 3).

(а) Покажите, что можно стереть не более восьми из них так, что из оставшихся никакие четыре не будут лежать в вершинах квадрата.

(б) Покажите, что можно обойтись стиранием шести точек.

(в) Найдите минимальное число точек, которые достаточно стереть для этого.

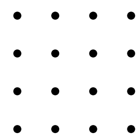

Рис. 3

Задача 7. (а) Ночью насекомые «таранят» лампы, свечи и т. п. Почему они не «улетают на Луну», даже если она стоит низко над горизонтом?

(б) В момент начала наблюдений бабочка была в 10 метрах к югу от фонаря и летела в направлении под углом 60° к северу с постоянной скоростью 1 м/с. Через сколько секунд она столкнется с фонарем?

20. Сколько?

(20 марта 2002 г.)

Задача 1. На электронных часах Казанского вокзала высвечиваются часы и минуты (например, 17:36). Сколько времени в течение суток на них (а) высвечивается цифра 2; (б) высвечиваются цифры 5 и 7 одновременно?

Задача 2. Какое максимальное число ладей можно расставить в кубе $8 \times 8 \times 8$ так, чтобы они не били друг друга?

Задача 3. Чему равна сумма цифр всех чисел от единицы до миллиарда?

Задача 4. В большую шкатулку положили 10 шкатулок поменьше. В каждую из вложенных шкатулок либо положили 10 еще поменьше, либо ничего не положили. В каждую из меньших опять положили или 10, или ни одной, и т. д. После этого оказалось ровно 2002 шкатулки с содержимым. Сколько пустых?

Задача 5. Город Нью-Васюки имеет форму квадрата со стороной 5 км. Улицы делят его на кварталы, являющиеся квадратами со стороной 200 м. Какую наибольшую площадь можно обойти, пройдя по улицам Нью-Васюков 10 км и вернувшись в исходную точку?

Задача 6. Фабрика игрушек выпускает проволочные кубики, в вершинах которых расположены маленькие разноцветные шарики. По ГОСТу в каждом кубике должны быть использованы шарики всех восьми цветов (белого и семи цветов радуги). Сколько разных моделей кубиков может выпускать фабрика?

Восьмой класс

Ар-1. Арифметические действия

(2 сентября 2002 г.)

Встречаются множества, в которых можно — раскрывая скобки по обычным правилам — складывать, вычитать, умножать, а иногда даже делить. Такие множества еще называют кольцами. Вот те из них, которые нам сейчас понадобятся:

$\mathbb{Z}$ — целые числа;

$\mathbb{R}$ — действительные числа;

$\mathbb{Z}[i]$ — гауссовы числа, т. е. множество выражений вида $a+bi$, где a и b — целые, а $i^2=-1$;

$\mathbb{R}[x]$ — многочлены, т. е. множество выражений вида

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad (a_k\in\mathbb{R}),$$

сложение происходит покоэффициентно, а для умножения нужно раскрыть скобки и привести подобные члены;

$\mathbb{R}[[x]]$ — ряды, т. е. множество выражений вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \quad (a_k\in\mathbb{R}),$$

сложение и умножение определено как у многочленов.

Задача 1. Выполните действия с многочленами:
(а) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$;
(б) $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^9)^2$;
(в) $(x^4-7x^3+8x^2+28x-48)/(x^2-4)$;
(г) $(x^{56}+x^{55}+x^{54}+\ldots+x^2+x+1)/(x^{18}+x^{17}+\ldots+x+1)$.

Задача 2. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют целые коэффициенты, причем каждый из них имеет хотя бы один нечетный коэффициент. Доказать, что у произведения $P(x)Q(x)$ также есть хотя бы один нечетный коэффициент.

Задача 3. Выполните действия с гауссовыми числами:
(а) $(1+i)(1-i)+1$; (б) $(2+3i)(-3-i)+(-2+2i)(5-3i)$;
(в) $20i/(1-2i)$; (г) $(11i+16)/(3-2i)$;
(д) извлеките квадратный корень из $5+12i$.

Задача 4. Нарисуйте на координатной плоскости (x, y) все числа вида $x+iy=(2+i)(a+bi)$, где $-2\leqslant a, b\leqslant 4$.

Задача 5. Выполните действия с рядами:
(а) $(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)$;
(б) $(1-x+x^2-x^3+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots)$;
(в) $(1+x+x^2+\ldots)^2$;
(г) $x/(1+4x^2)$;
(д) $(2+x-x^2)(1-2x+3x^2-4x^3+\ldots)$;
(е) $(2+3x+3x^2+3x^3+3x^4+\ldots)\left(1-\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{4}-\frac{3x^3}{8}+\frac{3x^4}{16}-\ldots\right)$;
(ж)* $1/(1-x-x^2)$.

Задача 6. Извлеките квадратный корень из ряда:
(а) $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$; (б)* $1+x$.

Задача 7*. Как по коэффициентам ряда понять, является ли он полным квадратом?

Пусть M — одно из перечисленных в начале листка множеств. Скажем, что элемент a из M *делится* на элемент b из M ($b \neq 0$), если в M найдется такой элемент c, что $a = bc$. Обозначение: $a \vdots b$.

Задача 8. Делится ли $\underbrace{111\ldots1}_{1000\text{ штук}}$ на
(а) 3; (б) 11 111; (в) 111 111?

Задача 9. Делится ли
(а) $x^{1000}+x^{999}+\ldots+x+1$ на $x^6+x^5+\ldots+x+1$ (многочлены);
(б) x^4+x-2 на $x+2$ (многочлены);
(в) 57 на $x-2$ (многочлены);
(г) 57 на $x-2$ (ряды);
(д) $12+3i$ на $2+i$;
(е) $6+17i$ на $4i-3$?

Комб-1. Комбинаторика-1. Производящие функции
(18 сентября 2002 г.)

Задача 1. (а) Вычислите бесконечное произведение:

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2^k}) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots$$

(б) Докажите, что с помощью гирек в 1, 2, 4, 8, 16, … граммов (по одной каждого веса) можно составить любой целый положительный вес, притом ровно одним способом.

(в) Докажите, что любое натуральное число можно записать в двоичной системе счисления (например, $57_{10} = 111001_2$), причем единственным способом.

Задача 2. Вычислите бесконечное произведение:

$$(1+x+x^2+\ldots+x^9)(1+x^{10}+x^{20}+\ldots+x^{90})(1+x^{100}+x^{200}+\ldots+x^{900})\ldots$$

Задача 3. Выпишите и докажите аналогичное равенство для системы счисления по основанию 13.

Задача 4*. (а) Докажите, что

$$\left(1+x+\frac{1}{x}\right)\left(1+x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(1+x^9+\frac{1}{x^9}\right)\left(1+x^{27}+\frac{1}{x^{27}}\right)\ldots = \\ = 1+x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}+x^3+\frac{1}{x^3}+x^4+\frac{1}{x^4}+\ldots$$

(дать все недостающие определения и объяснить эту запись вам предстоит самим).

(б) Докажите, что имея в распоряжении гирьки в 1, 3, 9, 27, … граммов (по одной каждого веса) можно, воспользовавшись обеими чашами весов, составить любой целый положительный вес, притом ровно одним способом.

Задача 5. Вычислите бесконечное произведение:

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1-x^{2^k}) = (1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\ldots$$

Определение 1. *Производящей функцией* последовательности a_0, a_1, a_2, $a_3\ldots$ называется ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

Задача 6. *Числа Фибоначчи* f_n определяются формулами $f_0=0$, $f_1=1$, $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ при $n\geqslant 2$. Докажите, что производящей функцией чисел Фибоначчи является ряд $\frac{x}{1-x-x^2}$.

Определение 2. Производящая функция называется *рациональной*, если ее можно представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P, Q — многочлены. (Например, производящая функция чисел Фибоначчи рациональна.)

Задача 7. Докажите, что производящие функции последовательностей (а) $1, 3, 9, 27\ldots$; (б) $1, 3, 5, 7, 9\ldots$ рациональны.

Задача 8*. Приведите пример производящей функции, не являющейся рациональной.

Задача 9. Обозначим через A_n число решений уравнения $x+2y+5z+10t=n$ в неотрицательных целых числах. Например, $A_0=1$, $A_1=1$, $A_2=2$, $A_3=2$, $A_4=3$, $A_{12}=15$. Докажите, что производящая функция последовательности A_n имеет вид $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$.

Задача 10. Сколькими способами можно разменять купюру в 100 евро на монетки по 1 и 2 евро и купюры по 5 и 10 евро?

Задача 11. Докажите, что

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots}.$$

Задача 12. Докажите, что каждое натуральное число можно представить в виде суммы *различных* натуральных слагаемых столькими же способами, сколькими его можно представить в виде суммы *нечетных* натуральных слагаемых. Например, 6 можно представить как

$$6,\ 1+5,\ 2+4,\ 1+2+3$$

и как

$$1+5,\ 3+3,\ 1+1+1+3,\ 1+1+1+1+1+1,$$

— и там, и там четыре способа.

Комб-2. Комбинаторика-2
(5 октября 2002 г.)

Не поискать ли мне тропы иной,
Приемов новых, сочетаний странных?
В. Шекспир. Сонет 76

Определение 1. Обозначим через C_n^k количество k-элементных подмножеств множества из n элементов.

Например, $C_4^2=6$, так как у множества $\{1, 2, 3, 4\}$ есть ровно 6 двухэлементных подмножеств:

$$\{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{1, 4\},\ \{2, 3\},\ \{2, 4\},\ \{3, 4\}.$$

Часто k-элементное подмножество множества M элементов также называют *k-сочетанием* из M.

Задача 1. (а) Выпишите все 3-элементные подмножества множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и найдите C_6^3.

(б) Докажите, что $C_n^k=C_n^{n-k}$.

Задача 2. В расписании на субботу 8 «В» решили поставить три геометрии и три географии. Сколькими способами можно составить такое расписание?

Задача 3. (а) Докажите, что при фиксированном n производящей функцией для C_n^k будет многочлен $(1+x)^n$.

(б) **(Бином Ньютона[1].)** Докажите, что

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots$$
$$\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}.$$

Доказывать теоремы про числа сочетаний можно алгебраически (например, из тождеств вида $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n)$, а можно и комбинаторно (например, «рассмотрим все подмножества, для которых...»).

Задача 4. Приведите алгебраическое и комбинаторное доказательства того, что

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k.$$

[1]Isaak Newton (1643—1727) — великий английский математик, астроном и физик, разработавший (наряду с Лейбницем) основы дифференциального и интегрального исчисления.

Определение 2. На месте каждой точки из рис. 1 напишем число путей, состоящих из стрелочек и ведущих из корня T в данную точку. Полученный треугольник из чисел называется *треугольником Паскаля*[1].

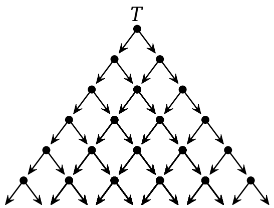

Рис. 1

Задача 5. (а) Нарисуйте треугольник Паскаля до десятого уровня включительно.

(б) Докажите, что на k-м месте в n-й строчке треугольника Паскаля стоит число C_n^k.

Задача 6. Если в классе дежурят два человека, то уходя они ставят на доске нолик, а если три — то крестик. Сколько есть вариантов таких последовательностей крестиков и ноликов, если всего дежурит 19 человек? (После завершения цикла дежурств начинается новая последовательность.)

Задача 7*. Докажите, что производящая функция двух переменных, сопоставленная треугольнику Паскаля по формуле $\sum\limits_{n,k=0}^{\infty} C_n^k x^k y^n$ имеет вид $\dfrac{1}{1-y-xy}$.

Задача 8. Вычислите алгебраически и комбинаторно следующие суммы:

(а) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$;

(б) $C_n^1 + C_n^3 + \ldots$ и $C_n^0 + C_n^2 + \ldots$;

(в) $C_m^0 C_n^s + C_m^1 C_n^{s-1} + \ldots$ **(свертка Вандермонда)**;

(г)* $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$

Задача 9. Нарисуем треугольник Паскаля и выровняем его по левому краю (см. рис. 2). Чему равна сумма чисел на n-й восходящей диагонали?

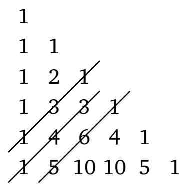

Рис. 2

Задача 10. Сколькими способами можно пройти из A в B, двигаясь только направо и вверх (см. рис. 3)? Сколько таких путей проходит через точку с координатами (4, 2)?

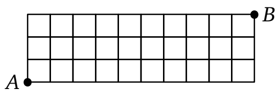

Рис. 3

Задача 11. Докажите (алгебраически и комбинаторно), что

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

[1]Blaise Pascal (1623—1662) — великий французский философ, математик и физик.

Задача 12*. Обозначим через $f_{m,n}$ число путей из точки (0, 0) в точку $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, где каждый шаг имеет вид (1, 0), (0, 1) или (1, 1). Докажите, что двумерная производящая функция $\sum\limits_{m,n \geqslant 0} f_{m,n} x^m y^n$ имеет вид $\dfrac{1}{1-x-y-xy}$.

Ар-2. Индукция
(30 октября 2002 г.)

> Кем-то был предложен регрессивный метод: чтобы обнаружить книгу A, следует предварительно обратиться к книге B, которая укажет место A; чтобы разыскать книгу B, следует предварительно справиться в книге C, и так до бесконечности. В таких вот похождениях я растратил и извел свои годы.
>
> *Х. Л. Борхес. Вавилонская библиотека*

Принцип математической индукции

Рассмотрим последовательность утверждений $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ Пусть известно, что 1) T_1 истинно, 2) если истинно T_n, то истинно и T_{n+1}.

Тогда для всех натуральных n утверждение T_n истинно.

Утверждение T_1 называется *базой индукции*, следствие $T_n \Rightarrow T_{n+1}$ — *переходом индукции*, утверждение T_n — *предположением индукции*.

Задача 1. Докажите, что число вида $\underbrace{11\ldots1}_{3^n \text{ единиц}}$ делится на 3^n.

Задача 2. После освобождения иракского народа Дик Чейни провел по линейке на карте Ирака несколько новых внутренних границ. Докажите, что получившиеся части можно разделить между Кувейтом и Иорданией так, чтобы соседние (т. е. имеющие общий промежуток границы) части достались разным странам.

Задача 3. На листе бумаги в клетку нарисовали квадрат со стороной 1024, из которого вырезали одну клетку. Докажите, что его можно разрезать на уголки, состоящие из трех клеток.

Задача 4*. Один выпуклый многоугольник расположен внутри другого. Докажите, что периметр внутреннего меньше. Верно ли это для невыпуклых многоугольников?

Задача 5*. Дано n произвольных квадратов. Докажите, что их можно разрезать на части так, чтобы из полученных частей потом можно было сложить один квадрат.

С помощью индукции можно доказывать различные формулы, но при этом надо догадаться, как выглядит формула.

Задача 6. (а) Найдите сумму первых n натуральных чисел.
(б) Найдите сумму первых n нечетных натуральных чисел.
(в) Докажите, что $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$.
(г) Докажите, что $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$.

(д)* Выведите формулу для $1^7+2^7+3^7+\ldots+n^7$.

Задача 7. Сколькими способами можно рассадить n людей на
(а) n стульев; (б) k стульев, стоящих в ряд;
(в) k стульев, расположенных по кругу?

Задача 8. (а) Докажите, что числа C_n^k можно вычислять по формуле $C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$, где $k!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$ (при $k=0$ полагают $0!=1$).

Обратите внимание, что если записать эту формулу в виде

$$C_n^k=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!},$$

то она будет иметь смысл для любых (не обязательно натуральных) n, лишь бы число k было натуральным. Например,

$$C_{1/2}^3=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\right)\Big/3!=\frac{1}{16}.$$

Будем также (по определению) считать, что $C_n^0=1$ для любого n.

(б) Сформулируйте и докажите бином Ньютона для отрицательных целых n.

Hint. Ответом будет уже не многочлен, а бесконечный ряд.

(в)* Ваня придумал уличный калькулятор-автомат, который за 1 руб. может сложить, перемножить или поделить два числа. Как будет дешевле вычислять C_n^k: по формуле с факториалами или с помощью треугольника Паскаля? (Память у автомата бесплатная.)

Задача 9. Сколько различных слов длины n можно составить из букв A, B и C?

Задача 10*. Маршрут антарктической экспедиции проходит через несколько полярных станций и возвращается в исходную точку. Для обеспечения экспедиции на всех полярных станциях на маршруте сделаны запасы продовольствия, суммарного количества которого достаточно для того, чтобы пройти весь маршрут. Докажите, что можно выбрать станцию, высадившись на которой без запасов провизии, полярники смогут полностью пройти свой путь.

Задача 11. Докажите, что если число $a+\dfrac{1}{a}$ целое, то и число $a^k+\dfrac{1}{a^k}$ тоже целое, $k\in\mathbb{N}$.

Задача 12*. На вечеринке собралось 12 супружеских пар. Встречаясь, некоторые участники обменивались рукопожатиями (супруги, естественно, друг другу рук не пожимали). Мистер Браун опросил всех участников и выяснил, сколько рукопожатий сделал каждый из них. Все названные числа оказались различными. Сколько раз пожимала руку миссис Браун?

Ар-3*. Целая и дробная части числа
(1 декабря 2002 г.)

Определение 1. *Целой частью* $[x]$ числа $x \in \mathbb{R}$ называется наибольшее целое число, не превосходящее x. *Дробной частью* x называется число $\{x\} = x - [x]$.

Например, $[2] = 2$, $[-3,5] = -4$, $\{-0,5\} = 0,5$, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$.

Задача 1. (а) Дима знает, что $[x] = 3$, $[y] = 4$. Может ли он вычислить $[x + y]$?

(б) Другой Дима знает, что $\{x\} = 0,3$, $\{y\} = 0,4$. Может ли он вычислить $\{x + y\}$?

Задача 2. Обозначая дни недели от воскресенья до субботы числами 0, 1, 2, …, 6, Миша придумал формулу

$$\text{день недели} = 7 \cdot \{\text{число}/7\},$$

которая верна, если первое число месяца было понедельником. Как надо ее изменить, если первое число месяца было пятницей?

Задача 3. Постройте графики функций:
(а) $y = [x]$, $y = \{x\}$;
(б) $y = [x] + [-x]$, $y = \{x\} + \{-x\}$;
(в) $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] - [x]$, $y = [x] * \{x\}$.

Задача 4*. Найдите такое наименьшее положительное (не обязательно целое) число x, что
(а) $[x^2] - [x]^2 = 2002$; (б) $\{x^2\} - \{x\}^2 = \frac{1}{2002}$.

Задача 5. Верны ли следующие утверждения?
(а) При всех x, y, z верно равенство $[[x + y] + z] = [x + [y + z]]$.
(б) При всех x, y, z верно равенство $\{\{x + y\} + z\} = \{x + \{y + z\}\}$.
(в) При всех x, y, z верно равенство $[[x \cdot y] \cdot z] = [x \cdot [y \cdot z]]$.
(г) При всех x, y, z верно равенство $\{\{x \cdot y\} \cdot z\} = \{x \cdot \{y \cdot z\}\}$.
(д) Если $x > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$.
(е) Если $x, y, z \in \mathbb{N}$, то $\left[\frac{\left[\frac{x}{y}\right]}{z}\right] = \left[\frac{x}{yz}\right]$.

Задача 6. Решите уравнения и неравенства:
(а) $[x] \leqslant x - \frac{1}{2}$; (б) $\{x\} + \{57x\} = 1$; (в) $x^4 - 2x^2 + 5[x] - 6 = 0$.

Задача 7. Вычислите $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{10\,000}]$.

Задача 8. Найдите такое положительное число a, что $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$.

Задача 9. Изобразите на плоскости xOy множество точек, удовлетворяющих условию:
(а) $[x + y] \leqslant [x] + [y]$;
(б) $\{x\} + \{y\} = 1$;
(в) $[x] + [y] + [x + y] \geqslant [2x] + [2y]$.

Задача 10. Что больше:

$$\left[\frac{35}{23}\right] + \left[2 \cdot \frac{35}{23}\right] + \left[3 \cdot \frac{35}{23}\right] + \cdots + \left[22 \cdot \frac{35}{23}\right] \quad \text{или}$$
$$\left[\frac{23}{35}\right] + \left[2 \cdot \frac{23}{35}\right] + \left[3 \cdot \frac{23}{35}\right] + \cdots + \left[34 \cdot \frac{23}{35}\right]?$$

Задача 11. Сколько нулей на конце числа 2002!?

Задача 12. (а) Докажите, что наибольшая степень простого числа p, делящая $n!$, есть $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots$

Какова наибольшая степень простого числа, делящая
(б) $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)$;
(в) $(2n + 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n + 1)$?

Задача 13 (решето Эратосфена). Пусть $n \in \mathbb{N}$, а $p_1, \ldots, p_r$ — все простые числа, не превосходящие $\sqrt{n}$. Выпишем в строчку все числа от 1 до n: $1, 2, 3, \ldots, n$. Начнем вычеркивать из этой строчки сначала все числа, кратные p_1, потом кратные p_2, и так далее до p_r.

(а) Какие числа останутся невычеркнутыми? Вычеркнуто ли само число n?

(б) Докажите, что количество оставшихся чисел равно

$$n - \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} [n/p_i] + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} [n/(p_i \cdot p_j)] - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant r} [n/(p_i \cdot p_j \cdot p_k)] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^r [n/(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r)].$$

Задача 14. Найдите первые сто сорок шесть знаков после запятой в числе $\{(2 + \sqrt{3})^{2002}\}$.

Задача 15*. Известно, что $x_1 = 1/2$ и $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ при $k > 1$. Найдите целую часть выражения $\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{x_{100} + 1}$.

Задача 16*. Существуют ли такие иррациональные числа a и b, большие 1, что $[a^m] \neq [b^n]$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$?

Ар-4. Делимость в $\mathbb{Z}$

(14 декабря 2002 г.)

В первом листке (Ар-1) мы познакомились с общим понятием делимости. Обратимся теперь к частному, но очень важному случаю целых чисел.

Определение 1. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Будем говорить, что *a делится на b* (обозначается $a \vdots b$), если существует такое $c \in \mathbb{Z}$, что $a = b \cdot c$. Вместо $a \vdots b$ часто используют обозначение $b \mid a$ («*b делит a*»).

Задача 1. (а) Делится ли 2 на 3?

(б) Правда ли, что если $a < b$, то a не делится на b?

(в) Для каких пар целых чисел a и b выполнено одновременно $a \vdots b$ и $b \vdots a$?

Задача 2. Докажите свойства делимости:

(а) если $a \vdots c$, то $(k \cdot a) \vdots c$;

(б) если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a+b) \vdots c$;

(в) если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a-b) \vdots c$;

(г) если $a \vdots c$ и $b \vdots d$, то $(a \cdot b) \vdots (c \cdot d)$;

(д) если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.

Задача 3. Докажите, что при всех целых n

(а) $n(n+1)(n+2) \vdots 6$; (б) $((n+1)^3 - (n-1)^3 + 4) \vdots 6$.

Целые числа (впрочем, не только целые и не только числа) можно делить с остатком.

Определение 2. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. *Разделить a на b с остатком* значит найти такие целые q и r, что

$$a = b \cdot q + r \quad \text{и} \quad 0 \leqslant r < |b|$$

(q называют *неполным частным*, а r — *остатком*).

Задача 4. Каков остаток от деления

(а) -5 на -10? -10 на -5?

(б) $-20\,022\,002$ на 855?

(в) $12\,345\,678\,987\,654\,321$ на 101?

(г) $123\,456\,789$ на 7?

(д)* $a^n - 1$ на $a^m - 1$ ($a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$)?

Задача 5. Докажите, что деление с остатком всегда возможно, причем неполное частное и остаток определены однозначно.

Hint. Рассмотрите наименьшее неотрицательное число вида $a - b \cdot q$.

Задача 6. Известно, что a и b при делении на 18 дают остатки 7 и 17 соответственно. Что можно сказать об остатках от деления $a+b$ и $a \cdot b$ на 18?

Задача 7*. При попытках разделить кулек конфет на 3, 4 и 5 равных кучек оставалось соответственно 1, 2, 4 конфеты. Сколько останется конфет при делении на 6 или 20 кучек? А на 7?

Задача 8.

(а) Решите уравнение $\dfrac{103993}{16551} = 6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}}}}}$.

(б) Упростите: $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$ (n знаков дроби).

Определение 3. Цепной дробью называют выражение вида:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

где $n \geqslant 0$, $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ при $i \geqslant 1$. Мы будем записывать это выражение так: $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$.

Задача 9. Докажите, что всякое рациональное число представимо в виде цепной дроби. Единственно ли такое представление?

Задача 10*. (а) Что больше: $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ или $[a_0; a_1, \ldots, a_{n+1}]$?

(б) Пусть $d_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$ — подходящие дроби для цепной дроби $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$. Доказать, что тогда при четных $k \geqslant 0$ верны неравенства

$$d_k \leqslant d_{k+2} \leqslant d_{k+3} \leqslant d_{k+1}.$$

Задача 11. Разложите в цепную дробь:

(а) $\dfrac{87}{32}$; (б) $\dfrac{98\,765}{43\,210}$; (в) $\dfrac{104\,348}{33\,215}$.

Задача 12*. (а) Чему равно $[1; 1, 1, 1, 1, \ldots]$?

(б) Представьте $\sqrt{57}$ в виде цепной дроби.

Ал-1. Многочлены
(20 января 2003 г.)

Задача 1. (а) В выражении $(x^5-6x^4+3x^2+1)^{2002}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Найдите сумму коэффициентов при всех степенях x в полученном выражении.

(б) У многочлена $P(x)$ сумма коэффициентов при четных степенях равна сумме коэффициентов при нечетных степенях; многочлен $Q(x)$ обладает тем же свойством. Можно ли утверждать, что это свойство выполнено и для многочленов $P(x)+Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?

Многочлены выгодно отличаются от рядов тем, что в них можно подставлять не только нуль, а любое число. Подумайте, какой смысл имеют значения многочлена в точках 0, 1, −1.

Определение 1. Пусть $P(x)$ — многочлен, $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ $\ldots+a_nx^n$, α — число. *Значением* многочлена $P(x)$ в α называется число $P(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_n\alpha^n$. Число α называется *корнем* многочлена $P(x)$, если $P(\alpha)=0$.

Задача 2. Докажите, что если $P \,\vdots\, Q$ (P, Q — многочлены), то все корни Q являются корнями P. Верно ли обратное?

Задача 3*. Существует ли такой многочлен $P(x)$ с *целыми* коэффициентами, что

(а) $P(0)=19$, $P(1)=89$, $P(2)=1989$; (б) $P(1)=19$, $P(19)=89$?

Задача 4. (а) Дайте формальное определение *степени* $\deg P$ (от слова «degree») многочлена P.

(б) Докажите, что $\deg(PQ)=\deg P+\deg Q$. Как связаны $\deg(P+Q)$ и $\deg(P-Q)$ с $\deg P$ и $\deg Q$?

(в)* Дайте определение степени ряда так, чтобы оно совпадало с предыдущим для рядов вида x^n (одночленов) и удовлетворяло соотношению $\deg(PQ)=\deg P+\deg Q$. Чему равна степень x^2+x как ряда?

Задача 5*. (а) Рассмотрим для многочлена $P(x)$ последовательность $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, … его значений в натуральных числах. Составим последовательность разностей, написав под каждыми двумя числами из последовательности их разность (получится последовательность $P(1)-$ $-P(2)$, $P(2)-P(3)$, $P(3)-P(4)$, …). Сделаем то же самое с полученной последовательностью и т. д. Докажите, что на каком-то шаге полученная последовательность будет состоять из одних нулей.

(б) Придумайте последовательность, для которой ни одна из последовательностей разностей не будет нулевой.

Задача 6. (а) Сформулируйте, что значит поделить многочлен на многочлен с остатком, и докажите, что это всегда (при ненулевом делителе) возможно.

(б) Докажите, что остаток (а значит, и частное) определен однозначно.

Задача 7. Найдите остаток от деления

(а) $x^6-31x-1$ на $x-2$; (б) $x^5-6x^3+2x^2-4$ на x^2-x+1.

Задача 8 (теорема Безу). (а) Докажите, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-a$ равен $P(a)$.

(б) Пусть a — корень $P(x)$. Докажите, что тогда $P(x) \,\vdots\, (x-a)$. Верно ли обратное?

(в) Пусть $P(1)=P(2)=0$. Докажите, что тогда $P(x) \,\vdots\, (x-1)(x-2)$. Обобщите этот факт.

(г) Докажите, что многочлен n-й степени не может иметь более n различных корней.

(д) Можно ли найти два таких многочлена, что их значения совпадают при все натуральных $x=n$, и различны при $x=\sqrt{2}$?

(е)* Уточните формулировку пункта г), разобрав случай кратных[1] корней.

Задача 9. (а) Остатки от деления многочлена $F(x)$ на многочлены $x-2$ и $x-3$ равны соответственно 5 и 7. Найдите остаток от деления многочлена $F(x)$ на многочлен x^2-5x+6.

(б) Найдите остаток от деления многочлена $x^{105}+x+1$ на многочлен x^2-1.

Задача 10. Делятся ли (в $\mathbb{R}[x]$)

(а) x^5-4x^2+24 на $2x-4$; (б) $7x^{2002}+13x-2$ на x^2-1;
(в)* $x^{2002}+x-2$ на x^2+1; (г)* $x^{103}-10^{57}x^2+125$ на $3x-1$?

Задача 11. Докажите, что для любых трех различных чисел a, b и c имеют место равенства:

(а) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0;$

(б) $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ac}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}=1;$

Hint. Рассмотрите тождество

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\equiv 1.$$

(в)* $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}=0;$

[1] Пусть $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, $P(x)\neq 0$, $P(\alpha)=0$ ($\alpha\in\mathbb{R}$). *Кратностью* корня α называется такое натуральное число k, что $P(x) \,\vdots\, (x-\alpha)^k$ и $P(x) \,\not\vdots\, (x-\alpha)^{k+1}$. Корень называется *кратным*, если его кратность больше единицы.

(г)* $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1;$

(д)* $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$

(е)* Придумайте какое-нибудь нетривиальное тождество для a, b, c, d.

Определение 2. Определим ряд $(1+x)^\alpha$ как $\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k$.

Задача 12. (а) Проверьте корректность (что это значит?) нашего определения.

(б) Докажите, что $(1+x)^\alpha \cdot (1+x)^\alpha = (1+x)^{2\alpha}$.

Указание. Рассмотрите коэффициент при x^k как многочлен от α.

(в) Извлеките квадратный корень из ряда $1+x$.

(г)* Докажите, что $(1+x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}$.

Геом-1*. Аффинные плоскости
(8 февраля 2003 г.)

Определение 1. Пусть Π — множество, $\mathscr{L}$ — некоторый набор его подмножеств. Элементы Π мы будем называть точками, а элементы $\mathscr{L}$ — прямыми. Говорят, что пара $(\Pi, \mathscr{L})$ образует *аффинную плоскость*, если выполнены следующие три условия (аксиомы).

АП1. Существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

АП2. Для любых двух различных точек существует, притом ровно одна, прямая, их содержащая.

АП3. Для любой прямой l и точки A, не принадлежащей l, существует ровно одна прямая, содержащая A и не имеющая общих точек с l.

Эти условия, разумеется, выполнены на нашей «обычной» (евклидовой) плоскости, так что она является аффинной. Есть и другие примеры.

Задача 1. Придумайте аффинную плоскость с

(а) 4; (б) 9 точками.

Задача 2. (а) Пусть Π — подмножество координатной плоскости, состоящее из точек, обе координаты которых рациональные числа, а $\mathscr{L}$ состоит из пересечений Π с обычными прямыми, проходящими через пару точек из Π. Докажите, что $(\Pi, \mathscr{L})$ — аффинная плоскость.

(б) Будет ли предыдущее утверждение верно, если вместо $\Pi=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ положить $\Pi=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

Задача 3 (первые следствия аксиом). Докажите, что

(а) на каждой прямой в аффинной плоскости лежит не менее двух точек;

(б) в любой точке аффинной плоскости пересекается не менее трех прямых.

Задача 4. Пусть дана аффинная плоскость $(\Pi, \mathscr{L})$. Докажите, что

(а) число точек в Π не меньше 4;

(б) на любой прямой $l\in\mathscr{L}$ не менее двух точек;

(в) если в Π не менее 5 точек, то их и не менее 9.

Определение 2. Пусть по-прежнему $(\Pi, \mathscr{L})$ — аффинная плоскость. Прямые l и m $(l, m \in \mathscr{L})$ называются параллельными (обозначается $l \parallel m$), если они не имеют общих точек. (Обратите внимание, что мы не считаем совпадающие прямые параллельными.)

Задача 5. Рассмотрим аффинную плоскость $(\Pi, \mathscr{L})$.

(а) Докажите, что если $l\parallel m$ и $m\parallel n$,то $l\parallel n$ или $l=n$.

(б) Докажите, что на любых двух прямых из $\mathscr{L}$ одно и то же число точек.

(в) Докажите, что через любую точку $A \in \Pi$ проходит одинаковое (какое именно?) число прямых. (Это утверждение двойственно предыдущему в смысле задачи 11.)

Предыдущая задача позволяет нам дать следующее

Определение 3. *Порядком* конечной аффинной плоскости называется число точек на любой прямой в этой плоскости.

Задача 6 (сколько точек на плоскости?). Рассмотрим конечную аффинную плоскость $(\Pi, \mathscr{L})$ порядка k.

(а) Докажите, что каждой прямой параллельно ровно $k-1$ прямых.

(б) Докажите, что в Π ровно k^2 точек.

(в) Сколько прямых в $\mathscr{L}$?

Задача 7. Существует ли аффинная плоскость порядка[1]

(а) 5; (б) 4; (в)* 6?

Задача 8. Из 16 альпинистов нужно выбрать четверых для восхождения на Чогори. Тренировочные восхождения проводятся четырьмя группами по четыре спортсмена в каждой. Можно ли составить график тренировок таким образом, чтобы каждые два альпиниста ровно один раз побывали в одной группе?

Задача 9 (задача Эйлера). Пусть есть n полков, в каждом из которых есть офицеры n званий. Требуется так выстроить n^2 офицеров (по n из каждого полка) в каре $n \times n$, чтобы в каждой шеренге и в каждой колонне было бы по одному офицеру каждого полка и чина.

(а) Приведите пример такого расположения для $n=5$ (в вашем распоряжении уланы, драгуны, гусары, кирасиры и гренадеры, являющиеся полковниками, майорами, капитанами, поручиками и подпоручиками).

(б) Докажите, что если есть аффинная плоскость порядка n, то для этого числа задача Эйлера имеет решение.

(в) Докажите, что для $n = 14$ задача Эйлера имеет решение (в то время как аффинной плоскости порядка 14 по теореме Брука—Райзера не существует).

(г)* Докажите, что для $n=6$ (а именно для этого числа ее первоначально и сформулировал автор) задача Эйлера не имеет решения.

Задача 10 (проективная плоскость). В столице страны царя Дезарга система линий метрополитена устроена следующим образом.

[1] Упомянем также в этой связи общую теорему Брука—Райзера, которая утверждает, что если число k дает при делении на 4 остаток 1 или 2 и существует аффинная плоскость порядка k, то k представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.

ПП1. Существуют 4 станции, любые три из которых не лежат на одной линии.

ПП2. С любой станции на любую другую можно проехать без пересадки.

ПП3. С любой линии на любую другую можно пересесть и притом ровно на одной станции.

Докажите, что

(а) число станций не меньше 7;

(б) на всех линиях станций поровну (это число минус один называется *порядком* проективной плоскости);

(в) число станций равно числу линий;

(г) если одну линию закрыть на ремонт (вместе с ее станциями), то получится аффинная плоскость.

(д)* Верно ли, что любую аффинную плоскость можно так получить?

Для каждого геометрического утверждения, включающего в себя лишь прямые, точки и отношение принадлежности, можно сформулировать *двойственное* ему утверждение, получаемое из исходного заменой слов «прямая» на «точка», «точка» на «прямая» и обращением знака принадлежности в другую сторону. Например, утверждение, двойственное аксиоме АП2 формулируется так:

АП2′. Любые две различные прямые имеют ровно одну общую точку.

Задача 11 (проективная двойственность). (а) Сформулируйте утверждения, двойственные аксиомам **АП** и **ПП**. Какие из этих утверждений верны в соответствующих геометриях?

(б) Докажите (это и есть проективная двойственность), что на проективной плоскости точки и прямые равноправны, т. е. для любого утверждения проективной геометрии двойственное к нему также верно. (Вот поэтому, например, в проективной геометрии точек и прямых одинаковое количество.)

(в) Равноправны ли точки и прямые на аффинной плоскости?

(г) Докажите, что для проективной плоскости следующие утверждения эквивалентны.

1) Некоторая прямая содержит ровно $n+1$ точку.
2) Некоторая точка лежит ровно на $n+1$ прямой.
3) Каждая прямая содержит ровно $n+1$ точку.
4) Каждая точка лежит ровно на $n+1$ прямой.
5) В данной плоскости ровно n^2+n+1 точка.
6) В данной плоскости ровно n^2+n+1 прямая.

Задача 12. Нарисуйте схему метрополитена для царя Дезарга так, чтобы на каждой линии было по (а) 3; (б) 5; (в) 6 станций.

(г)* Можно ли построить такую схему метрополитена, в которой всего было бы 57 станций?

Комб-3. Комбинаторика-3. Числа Каталана

(5 марта 2003 г.)

Определение 1. *Правильной скобочной структурой* называется конечная последовательность левых и правых скобок, удовлетворяющая условиям:

(а) число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;

(б) число левых скобок в любом начальном отрезке правильной скобочной структуры не меньше числа правых скобок.

Пример 1. Если в арифметическом выражении со скобками, например в

$$((8+4):(2-5))\times(3:(25-22)),$$

стереть все числа и все знаки операций, останется правильная скобочная структура. В нашем случае это будет последовательность $(()())(())$.

Определение 2. Назовем n-м *числом Каталана* c_n число различных правильных скобочных структур из n пар скобок. Соответствующая производящая функция обозначается через $\mathrm{cat}(s)$.

Задача 1. Выведите

(а) соотношение $t\cdot\mathrm{cat}^2(t)-\mathrm{cat}(t)+1=0$,

(б) формулу $\mathrm{cat}(t)=\dfrac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$.

Задача 2*. Докажите, что производящая функция $\mathrm{cat}(t)$ не является рациональной (т. е. не представима в виде P/Q, где $P, Q\in\mathbb{R}[t]$, $Q\neq 0$).

Задача 3. (а) Докажите, что

$$c_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n.$$

(б)* Придумайте комбинаторное (в терминах «классической» комбинаторики) доказательство предыдущей формулы.

Задача 4. Поставим посередине треугольника Паскаля стенку и будем писать числа только справа от нее (см рис. 1).

(а) Докажите, что на вертикальной прямой стоят числа Каталана.

(б) Чему равна сумма чисел на n-й восходящей диагонали?

1							
	1						
1		1					
	2		1				
2		3		1			
	5		4		1		
5		9		5		1	
	14		14		6		1

Рис. 1

Определение 3. Рассмотрим выпуклый $(n+2)$-угольник, вершины которого занумерованы против часовой стрелки числами от 0 до $n+1$. *Диагональной триангуляцией* назовем разбиение такого многоугольника на треугольники непересекающимися диагоналями.

Задача 5. Докажите, что число триангуляций $(n+2)$-угольника при $n\geqslant 1$ равно c_n.

Задача 6. Дайте формальное определение путей Дика[1] и докажите, что число путей Дика из $2n$ звеньев равно c_n.

Задача 7. Докажите, что производящая функция $\mathrm{cat}(t)$ разлагается в цепную дробь:

$$\mathrm{cat}(t)=\cfrac{1}{1-\cfrac{t}{1-\cfrac{t}{1-\cfrac{t}{1-\ddots}}}}.$$

Определение 4. *Пути Моцкина* определяются так же, как и пути Дика, только они могут включать в себя горизонтальные векторы $(1,0)$. Число путей Моцкина из n векторов называется n-м *числом Моцкина* и обозначается через m_n. Вот начало последовательности Моцкина:

$$m_0=1,\quad m_1=1,\quad m_2=2,\quad m_3=4.$$

Задача 8. (а) Вычислите 5 следующих членов этой последовательности.

(б) Найдите рекуррентное соотношение и производящую функцию для нее.

Задача 9. Докажите следующие общие теоремы.

(а) Производящая функция числа путей от точки 0 до точки N оси абсцисс, когда на i-м уровне вправо вверх — a_i путей, вправо вниз — b_i путей, имеет вид:

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1b_1t^2}{1-\cfrac{a_2b_2t^2}{1-\ddots}}}.$$

[1] Описание путей Дика было дано на лекции. См. книгу С. К. Ландо «Лекции о производящих функциях» (М.: МЦМНО, 2007).

(б) Если добавить еще по c_i горизонтальных путей, то производящая функция будет иметь вид:

$$\cfrac{1}{1-c_1t-\cfrac{a_1b_1t^2}{1-c_2t-\cfrac{a_2b_2t^2}{1-\ddots}}}.$$

Определение 5. *Up-down* или *пилообразной* перестановкой называется такая конечная последовательность $a_1, a_2 \ldots, a_N$ различных натуральных чисел от 1 до N, в которой каждое число либо больше обоих соседей, либо меньше обоих, причем $a_{N-1} > a_N$. Например, (4, 7, 6, 9, 1, 3, 2, 8, 5) есть одна из up-down перестановок для $N = 9$. График такой перестановки (нарисуйте его!) выглядит как пила.

Задача 10* (Бернулли, Эйлер и перечисление змей). На рисунке 2 дано определение *треугольника Бернулли—Эйлера*. Заполните две следующие строки этого треугольника и докажите, что (при такой же нумерации строк и столбцов, как и в треугольнике Паскаля) число, стоящее на $(n-k)$-м месте в $(n-1)$-й строке треугольника Бернулли—Эйлера равно числу up-down перестановок длины n, начинающихся с k.

Задача 11*. Докажите, что производящая функция чисел Эйлера имеет вид:

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{t^2}{1-\cfrac{2^2t^2}{1-\cfrac{3^2t^2}{1-\ddots}}}}.$$

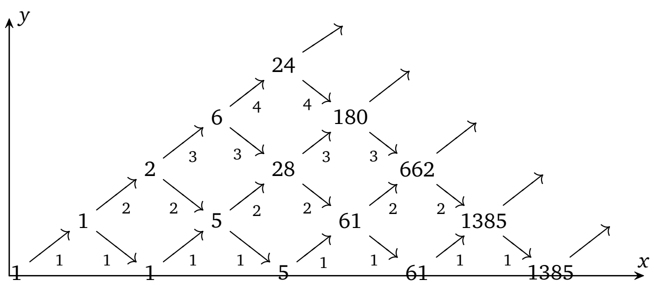

Рис. 2

Задача 12*. Разложите в цепную дробь производящую функцию чисел Бернулли.

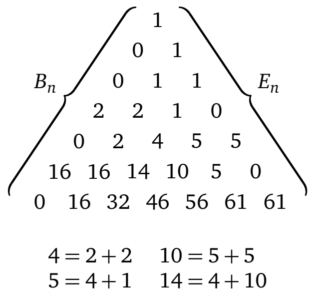

Рис. 3

Комб-4. Комбинаторика-4. Числа Фибоначчи
(2 апреля 2003 г.)

Задача 1. Дано поле размера 2×16. Сколько есть различных способов замостить его доминошками 1×2?

Обозначим производящую функцию чисел Фибоначчи (см. Комб-1) через $F(x)$, $F(x)\in\mathbb{R}[[x]]$, а через f_n — n-е число Фибоначчи.

Задача 2. (а) Докажите, что $(1-x-x^2)F(x)=x$.

(б) Докажите, что $f_0+f_1x+f_2x^2+\ldots+f_nx^n=\dfrac{x-f_nx^{n+2}-f_{n+1}x^{n+1}}{1-x-x^2}$.

Задача 3. Докажите следующие тождества:

(а) $f_0+f_1+\ldots+f_n=f_{n+2}-1$;

(б) $f_0+f_2+\ldots+f_{2n}=f_{2n+1}-1$, $f_1+f_3+\ldots+f_{2n-1}=f_{2n}$;

(в)* $f_1+2f_2+\ldots+nf_n=nf_{n+2}-f_{n+3}+2$;

(г)* $f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2=f_n\cdot f_{n+1}$;

(д) **(соотношение Кассини)** $f_{n+1}f_{n-1}-f_n^2=(-1)^n$;

(е) $f_{k+n}=f_kf_{n+1}+f_{k-1}f_n$.

Задача 4.

(а) Могут ли два соседних числа Фибоначчи делиться на 57?

(б) Заменим в последовательности (f_n) каждое число на его остаток от деления на 57. Докажите, что полученная последовательность будет периодична.

(в)* Может ли число Фибоначчи делиться на 57?

Задача 5 (формула Бине). Выведите из задачи 2а) явную формулу для n-го числа Фибоначчи.

Задача 6*. Является ли производящая функция чисел f_n^2 рациональной?

Задача 7. Найдите производящие функции последовательностей:

(а) $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$, $a_0=a_1=1$;

(б) $a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}-a_n$, $a_0=1$, $a_1=a_2=0$;

(в) $a_{n+3}=\frac{3}{2}a_{n+2}-\frac{1}{2}a_n$, $a_0=0$, $a_1=a_2=1$.

Задача 8. (а) Пусть последовательность a_n задается линейным рекуррентным соотношением порядка k с постоянными $c_1,\ldots,c_k$:

$$a_{n+k}=c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\ldots+c_ka_n,$$

где числа $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ заданы. Докажите, что тогда производящая функция $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ рациональна, $A(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, а степень многочлена P не превосходит $k-1$. (б) Как найти $Q(x)$?

Задача 9. Выведите явные формулы для последовательностей из задачи 7.

Задача 10 (теорема Цеккендорфа). (а) Докажите, что любое натуральное число единственным образом представляется в виде $a_2f_2+{}$ $+a_3f_3\ldots$, где f_n — числа Фибоначчи, а каждое из чисел a_i равно нулю или единице, причем единиц в сумме конечное число и два подряд идущих элемента последовательности a_i не могут равняться единице.

(б) Придумайте алгоритмы перевода чисел из фибоначчиевой системы счисления в позиционную и обратно.

Задача 11*. Придумайте алгоритм (а) сложения и (б) умножения чисел в этой системе счисления.

Задача 12*. Юра предложил Мише сыграть в такую игру. Юра задумывает число от 1 до 144, а Миша пытается его отгадать, задавая вопросы, на которые Юра (честно) отвечает «да» или «нет». В случае ответа «да» Миша платит Юре 1 рубль, в случае ответа «нет» — 2 рубля.

(а) Как должен играть Миша, чтобы сделать свой проигрыш в наихудшей ситуации минимальным?

(б) А как он должен себя вести, если вместо 144 стоит другое число?

Комб-5. Комбинаторика-5. Le Bagatelle
(7 мая 2003 г.)

— А чему соответствует на испанском языке слово le bagatelle? — спросил Дон Кихот.

— Le bagatelle, — пояснил переводчик, — в переводе на испанский язык значит безделки, но, несмотря на скромное свое заглавие, книга эта содержит и заключает в себе полезные и важные вещи.

Мигель де Сервантес Сааведра. Дон Кихот

Задача 1. Самое длинное слово норвежского языка — это

fylkestrafikksikkerhetssekretariatsfunksjonene.

(а) Сколько различных слов[1] можно получить перестановкой букв этого слова?

(б)* Переведите это слово на русский язык.

Задача 2. (а) Найдите коэффициент при мономе

$$a^3e^7f^3hi^3jk^7ln^3or^4s^6t^4uy$$

в многочлене

$$(a+e+f+h+i+j+k+l+n+o+r+s+t+u+y)^{46}.$$

(б) Придумайте и докажите *формулу полинома:*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = \sum_{l_1+l_2+\ldots+l_k=n} (\ldots)x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_k^{l_k}.$$

Задача 3 (расставим палочки). (а) Сколькими способами могут два Димы разделить между собой 57 одинаковых конфет?

(б) Сколько получится способов, если они решат поделиться еще с четырьмя Сашами (кому-то может ничего и не достаться)? Вычислите производящую функцию по числу конфет.

(в)* Вычислите производящую функцию по числу Саш.

Задача 4. (а) Сколько решений у уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ в натуральных числах?

(б) Тот же вопрос для неотрицательных целых чисел. (Сравните с задачей 10 из Комб-1.)

[1]Слова могут ничего не значить.

Задача 5. (а) Сколькими способами можно из «Сонетов» Шекспира выбрать 5 так, чтобы никакие два не шли подряд?

(б) У фокусника в рукаве m белых и n серых кроликов. Сколькими способами их можно рассадить на скамейке так, чтобы никакие два белых кролика не сидели рядом[1]?

(в) Как изменится число этих способов, если рассаживать кроликов по кругу?

Задача 6*. По пустыне идет караван из девяти верблюдов. Вскоре всем надоедает видеть перед собой одного и того же верблюда. Сколькими способами можно переставить верблюдов так, чтобы впереди каждого верблюда шел другой, чем раньше?

Задача 7 (броуновское движение). (а) 2^n друзей встречали День Последней Конституции в ресторане «Арбат». Выйдя оттуда, половина друзей отправилась по направлению к Бородино, а вторая половина — к Кремлю. За минуту каждая группа дошла до первого (со своей стороны) фонарного столба и опять разделилась — каждый второй изменил направление своего движения. Так происходило и дальше. Сколько друзей окажется у k-го фонарного столба через n минут?

(б) 4^n друзей встречали Последний День Конституции на лесоповале около г. Северколымск. Четверть из них пошла по восточной просеке, четверть — по северной, четверть — по западной, четверть — по восточной. Дойдя за один час до следующего разветвления, каждая группа разбилась опять на четыре части, и так далее. Сколько друзей будет найдено охранниками через n часов на пересечении k-й (считая от исходной точки) S-N и l-й W-E просек?

Задача 8. На плоскости нарисованы m вертикальных и n горизонтальных прямых.

(а) Сколько прямоугольников содержит полученная сетка?

(б) Сколько различных $(m+n)$-звенных ломаных можно провести так, чтобы каждая проходила по всем горизонтальным и всем вертикальным прямым?

Задача 9*. Сколькими способами можно расставить двух (p,q)-слонопотамов (heffalumps) на шахматной доске размером $m\times n$ так, чтобы они не били[2] друг друга?

Задача 10. Оператор комплекса С-400 (который никогда не промахивается) управляет ракетами трех типов. На экране своего дисплея он

[1]Они этого не любят.

[2]Слонопотамы ходят на p клеток по одному направлению и на q клеток по перпендикулярному. Например, конь — (1, 2)-слонопотам.

увидел два самолета AWACS, пятнадцать бомбардировщиков B-1, четыре истребителя прикрытия F-16C и три самолета F-117A.

(а) Сколькими способами он может обслужить[1] эти самолеты?

А сколько есть способов обслужить их так, чтобы использовать

(б) ракеты всех типов;

(в) не меньше двух ракет первого и второго типов и не меньше пяти ракет третьего типа?

Задача 11*. На рисунке 1 изображена *диаграмма Юнга*.

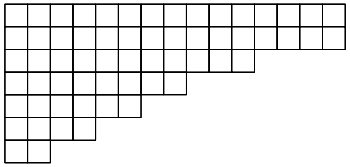

Рис. 1

(а) Докажите с помощью диаграмм Юнга, что число разбиений N на слагаемые, не превосходящие n, равно числу разбиений N на не более чем n слагаемых.

(б) Выпишите производящую (по количеству клеток) функцию числа диаграмм Юнга.

(в) Докажите, что число способов разбиения N на не более чем m слагаемых равно числу способов разбиения $N+\dfrac{m(m+1)}{2}$ на m неравных частей.

(г) Докажите, что число разбиений N на слагаемые, не превосходящие n, равно числу разбиений N на не более, чем n слагаемых.

Задача 12* (пентагональная теорема). Раскройте скобки в произведении: $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-t^n)$. (Первым это сделал, конечно, Эйлер.)

[1]В ПВО используется терминология теории массового обслуживания.

Вопросы к экзамену по комбинаторике
(май 2003)

1. Представления чисел в различных системах счисления и соответствующие алгебраические тождества.

2. Задача о счастливых билетах. Формула для десятичной системы счисления и номеров длины $2n$. Вычисление ответа для $n=3$.

3. Задача о размене монет. Вычисление производящей функции.

4. Число решений уравнения $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k=n$ $(a_i\in\mathbb{N})$ в $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_+$. Вычисление производящей функции.

5. Разбиение числа в сумму слагаемых. Равенство количества разбиений на нечетные и различные слагаемые, производящая функция этой величины.

6. C_n^k как число путей и как число сочетаний. Производящая функция чисел C_n^k при фиксированном n (бином Ньютона). Явная формула для C_n^k.

7. Число решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ в $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_+$ (явная формула). Алгебраическое и комбинаторное доказательства.

8. Число решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ в $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_+$ (явная формула). Формула полинома и перестановки букв.

9. Числа Фибоначчи. Фибоначчиева система счисления.

10. Числа Фибоначчи. Производящая функция и формула Бине.

11. Производящая функция для последовательности, заданной рекуррентным соотношением. Формула Бине.

12. Числа Каталана. Производящая функция и явная формула.

13. Числа Каталана, пути Дика и диагональные триангуляции. Представление производящей функции чисел Каталана в виде цепной дроби.

14. Треугольник Паскаля и числа Каталана. Треугольник Паскаля и числа Фибоначчи. Сумма и альтернированная сумма чисел строки треугольника Паскаля. Сумма квадратов чисел строки.

15. Производящая функция взвешенных путей Моцкина. Представление в виде цепной дроби.

Девятый класс

Геом-2. Движения плоскости — 1
(3 сентября 2003 г.)

Мы будем обозначать расстояние между точками A и B плоскости через $\rho(A, B)$. Напомним основные свойства расстояния.

1) $\rho(A, B) \geqslant 0$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $A = B$;

2) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;

3) $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, C)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC («*неравенство треугольника*»).

Определение 1. *Движением плоскости* называется такое взаимно однозначное (что это значит?) отображение $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ плоскости на себя, которое сохраняет расстояния, т. е.

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^2 \quad \rho(A, B) = \rho(f(A), f(B)).$$

Задача 1. (а) Покажите, что если f — движение, то обратное отображение f^{-1} (почему оно определено?) — тоже движение.

(б) Если g — еще одно движение, то композиция $f \circ g$ — снова движение.

(в) Выведите основные свойства движений: движения переводят прямые в прямые, окружности — в окружности, движения сохраняют параллельность и углы между прямыми и окружностями[1].

(г)* Докажите, что условие взаимной однозначности в определении 1 является излишним.

Определение 2. *Центральная симметрия с центром в точке O* — это такое отображение плоскости на себя, при котором точка O переходит в себя, а всякая другая точка X переходит в такую точку X', что O есть середина отрезка XX'.

Задача 2. Двое игроков выкладывают по очереди на прямоугольный стол пятаки. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

[1]На самом деле движение сохраняет углы между любыми гладкими кривыми, но у нас пока что нет определения кривой.

Задача 3. Докажите, что

(а) центральная симметрия — движение;

(б) если некоторая фигура[1] имеет два центра симметрии, то их у нее бесконечно много.

Задача 4. (а) Дан вписанный четырехугольник. Через середину каждой его стороны провели прямую, перпендикулярную противоположной стороне. Докажите, что проведенные прямые пересекаются в одной точке.

(б) Пусть у выпуклого n-угольника нет параллельных сторон, A — некоторая точка, не лежащая на сторонах многоугольника. Докажите, что тогда существует не более n отрезков с концами на сторонах многоугольника и с серединой в A.

Определение 3. *Осевая* (или *зеркальная*) *симметрия относительно прямой l* — это такое отображение плоскости на себя, при котором точки прямой l остаются на месте, а всякая точка X, не лежащая на этой прямой, переходит в такую точку X', что l — серединный перпендикуляр к отрезку XX'.

Задача 5. Стёпа хочет половить навагу в Баренцевом море, а селедку — в Белом. Как следует ему выбрать кратчайший путь с началом и концом на станции Хибины, если Кольский полуостров имеет форму

(а) острого угла; (б)* тупого угла?

Задача 6. Докажите, что

(а) осевая симметрия — движение;

(б) если некоторое движение оставляет все точки прямой неподвижными, то это либо тождественное отображение, либо симметрия относительно этой прямой;

(в)* угол между двумя осями симметрии многоугольника имеет рациональную градусную меру.

Задача 7. По одну сторону от прямой l расположены точки A и B. Постройте такую точку X на прямой l, что углы между AX и BX и прямой l

(а) равны; (б)* отличаются в два раза.

Задача 8. (а) Докажите, что площадь любого выпуклого четырехугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон.

(б) Когда достигается равенство?

[1]*Фигурой* в геометрии принято называть произвольное множество точек на плоскости.

Задача 9. (а) Может ли луч света «застрять» в угле, образованном двумя зеркалами?

(б)* Две прямые пересекаются под углом $\gamma°$. Кузнечик прыгает с одной прямой на другую; длина каждого прыжка равна 1, и кузнечик не прыгает обратно, если только это возможно. Докажите, что последовательность прыжков периодична тогда и только тогда, когда γ рационально.

Определение 4. *Параллельный перенос T_{AB} на вектор AB* — это такое отображение плоскости на себя, при котором всякая точка X переходит в такую точку X', что середины отрезков AX' и BX совпадают. (Уточните это определение для случаев, когда точки B и X совпадают или точка A является серединой BX.)

Задача 10. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из A в B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.)

Задача 11. Докажите, что

(а) параллельный перенос — движение;

(б) композиция параллельных переносов на векторы AB и BC есть параллельный перенос на вектор AC;

(в) дайте определение *вектора*.

Задача 12. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит

(а) 0,34; (б)* 0,287.

(в)* Приведите пример такой фигуры площадью не менее 0,22.

Геом-3. Движения плоскости — 2. Теорема Шаля
(21 сентября 2003 г.)

Определение 1. *Поворотом R_O^α относительно точки O на $\alpha°$* ($0 < \alpha \leqslant 180$) называется такое отображение плоскости на себя, которое переводит O в O, а любую другую точку X переводит в такую точку X', что $OX = OX'$, $\angle XOX' = \alpha°$ и луч OX' находится в направлении против часовой стрелки относительно луча OX.

Задача 1. (а) Постройте правильный треугольник, одна из вершин которого задана, а другие две лежат на данной окружности.

(б) Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место таких точек C, что сторона AC треугольника ABC и высота, проведенная к этой стороне, равны.

Задача 2. (а) Определите поворот на произвольное (в том числе отрицательное) число градусов.

(б) Докажите, что поворот — движение плоскости.

(в) Докажите, что если некоторое движение плоскости имеет ровно одну неподвижную точку, то это — поворот.

(г)* Что значит фраза «луч … находится в направлении против часовой стрелки …» в определении 1?

Задача 3. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.

Задача 4 (точка Торричелли). На сторонах треугольника ABC, углы которого не превышают 120°, внешним образом построены правильные треугольники ABC', $AB'C$ и $A'BC$. Докажите, что:

(а) AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке T и стороны треугольника видны из нее под равными углами;

(б) в точке T достигается минимум величины $AX + BX + CX$;

(в)* если P и Q — середины отрезков $A'B'$ и $A'C'$, то треугольник APQ правильный;

(г)* центры построенных в условии задачи треугольников образуют правильный треугольник.

Задача 5. Пусть углы α, β и γ таковы, что и $0° < \alpha, \beta, \gamma \leqslant 180°$ и $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, а точки A, B и C не лежат на одной прямой. Докажите, что если композиция поворотов $R_C^{2\gamma} \circ R_B^{2\beta} \circ R_A^{2\alpha}$ является тождественным преобразованием, то углы треугольника ABC равны α, β и γ.

Задача 6. (а) На сторонах AB и BC треугольника ABC внешним образом построены квадраты с центрами P и Q. Пусть M — середина AC. Найдите углы треугольника PQM.

(б) На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.

Определение 2. *Скользящей симметрией* называется композиция симметрии и параллельного переноса на вектор, *параллельный оси симметрии*.

Задача 7. (а) Докажите, что если A' — образ точки A при скользящей симметрии относительно прямой l, то середина отрезка AA' лежит на прямой l.

(б) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — равные треугольники, притом вершины ABC расположены по часовой стрелке, а $A_1B_1C_1$ — против. Пусть A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что A_2, B_2 и C_2 лежат на одной прямой.

Рассмотрим три типа движений: параллельный перенос T_{AB} на вектор $\overrightarrow{AB}$, осевую симметрию S_l относительно прямой l и поворот R_O^α на угол α относительно точки O. Составим таблицу умножения этих движений. Например, $T_{CD} \circ T_{AB} = T_{AE}$, где $E = T_{CD}(B)$.

Задача 8 (таблица умножения). Заполните остальные восемь клеток таблицы и укажите, в каких случаях порядок существен.

	T_{AB}	S_{l_1}	$R_{O_1}^\alpha$
T_{CD}	T_{AE}		
S_{l_2}			
$R_{O_2}^\beta$			

Задача 9. Докажите, что

(а) если некоторое движение оставляет на месте вершины данного треугольника, то оно тождественно;

(б) любое движение есть композиция не более трех симметрий.

Задача 10 (теорема Шаля). Любое движение есть поворот, параллельный перенос или скользящая симметрия.

Задача 11*. (а) Восстановите 2003-угольник по серединам его сторон.

(б) Впишите в данную окружность 57-угольник, стороны которого параллельны заданным 57 прямым.

(в) В условиях задачи о точке Торричелли постройте исходный треугольник по точкам A', B', C'.

Задача 12 (группы симметрий). Найдите все движения, переводящие в себя

(а) прямоугольник; (б) правильный треугольник;

(в) правильный шестиугольник; (г) круг.

(д)* Постройте такую фигуру, что существует ровно 57 движений, переводящих ее в себя.

(е)* Компостер прокалывает некоторые из клеток квадрата 3×3. Сколько существует различных (с точностью до сохраняющих ориентацию движений) отметок такого компостера?

Ар-5. НОД и АЕ
(18 октября 2003 г.)

Определение 1. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, причем a и b не равны нулю одновременно. *Наибольшим Общим Делителем* a и b называется наибольшее целое число, делящее a и b. Обозначение: НОД(a, b).

Задача 1. Найдите
(а) НОД$(n, n+1)$; (б) НОД$(n, n+6)$; (в) НОД$(2n+3, 7n+6)$;
(г) НОД$(2n-1, n^2)$; (д)* **(числа Ферма)** НОД$(2^{2^n}+1, 2^{2^m}+1)$.

Определение 2. *Алгоритм Евклида*[1] (АЕ) состоит из последовательности шагов. На каждом шаге по паре (a, b), $b \neq 0$, целых чисел строится пара (b, r), где r — остаток от деления a на b. Если $r = 0$, то алгоритм останавливается, иначе он применяется к паре (b, r).

Задача 2. Докажите, что
(а) для любой пары (a, b) целых чисел, $b \neq 0$, АЕ когда-нибудь остановится;
(б) $d = $ НОД(a, b), где $(d, 0)$ — пара, полученная на последнем шаге.

Задача 3. Вычислите:
(а) НОД$(81\,719, 52\,003)$, НОД$(6188, 4709)$, НОД$(-315, 159)$;
(б) НОД $(\overbrace{11\ldots1}^{1001}, \overbrace{11\ldots1}^{57})$.

Задача 4*. (а) К паре отрезков длины менее 1 км применили АЕ, который остановили после 40 шагов. Докажите, что остаток не превосходит 1 мм.
(б) Известно, что АЕ, примененный к паре отрезков длины a и b, так и не остановился, а частное каждый раз было равно 1. Найдите отношение $\varphi = a/b$ (*золотое сечение*).
(в) Докажите[2], что число делений в АЕ не превосходит

$$\lfloor \log_\varphi(\sqrt{5}(\max(a, b) + 1/2)) \rfloor - 1.$$

[1]Евклид ($E\upsilon\chi\lambda\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$), III век до Р. Х., — первый математик александрийской школы. Его главный труд «Начала» содержит изложение планиметрии, стереометрии и ряда вопросов теории чисел (например АЕ). Им также написаны книги «Конические сечения», «О делении фигур» и многочисленные работы по астрономии, оптике, музыке и др.

[2]Объяснение обозначений можно найти в книге «Конкретная математика» (Грэхем, Кнут, Поташник), а определение логарифма — в любом учебнике математики.

Задача 5. От прямоугольника со сторонами a и b $(a > b)$ разрешается отрезать квадрат со стороной b. Если получившийся после отрезания прямоугольник не квадрат, то с ним проделывают ту же операцию.
(а) На какие квадраты будет разрезан прямоугольник 6188×4709?
(б) Докажите, что любой прямоугольник с целочисленными сторонами будет разрезан на квадраты. Найдите площадь наименьшего из них.
(в) Какие прямоугольники можно таким образом разрезать на конечное число квадратов?

Задача 6. Докажите, что:
(а) НОД$(ka, kb) = k$НОД(a, b);
(б) НОД$(4a+2b, 6a+4b) = 2$НОД(a, b);
(в) НОД$(ka+lb, ma+nb) \vdots$ НОД(a, b);
(г) НОД$(13a+10b, 9a+7b) = $ НОД(a, b);
(д)* **($\mathbf{Sl_2(\mathbb{Z})}$)** если $kn - ml = 1$, то НОД$(ka+lb, ma+nb) = $ НОД(a, b) $(k, l, m, n \in \mathbb{Z})$.
(е)* Как связаны НОД$(ka+lb, ma+nb)$ и НОД(a, b) в случае произвольного определителя: $kn - ml = d$? $(k, l, m, n \in \mathbb{Z}.)$

Задача 7*. У Миши с Юрой есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n, разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, и съесть его а остаток передать противнику. Тот, кто получит последний кусок — треугольник со стороной 1, — победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре, если Миша ходит первым?

Задача 8 (Диофант). (а) У Олега есть две кружки объемом 314 мл и 159 мл. Сможет ли он с их помощью набрать ровно 1 л воды из ручья в кан для приготовления манной каши? (Если «да», то как набрать? Если «нет», то как поменьше ошибиться?)
(б) **(Очень Важная Лемма)** Докажите, что если $a, b \in \mathbb{Z}$ и НОД$(a, b) = d$, то найдутся такие $k, l \in \mathbb{Z}$, что $ka + lb = d$.

Задача 9*. При каких p и q (p, q)-слонопотам[1] на бесконечной шахматной доске может попасть на соседнее по вертикали поле?

Задача 10*. Двое фальшивомонетчиков играют в такую игру: в свой ход можно отчеканить неограниченный запас монет в $k > 1$ рублей, причем нельзя чеканить монеты, которые можно разменять уже отче-

[1]См. Комб-5.

каненными. Тот, кто не может сделать хода, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

Для того чтобы говорить про НОД в других кольцах[1] (многочлены, гауссовы числа, …), определение 1 не подходит (почему?). Поэтому мы сейчас дадим другое определение, у которого будет два отличия — определенный им НОД может не существовать, а может быть их и несколько.

Определение 3. Пусть M — одно из наших колец, $a, b \in M$, причем a и b не равны нулю одновременно. *Наибольшим Общим Делителем* a и b называется такой их общий делитель d, который делится на любой другой их общий делитель: $(a \vdots d')\&(b \vdots d') \Rightarrow (d \vdots d')$. Множество наибольших общих делителей a и b обозначается через $\text{НОД}_{\text{новый}}(a, b)$.

Задача 11. (а) Докажите, что в целых числах

$$\text{НОД}_{\text{новый}}(a, b) = \{\pm \text{НОД}_{\text{старый}}(a, b)\}.$$

(б)* Сколько наибольших общих делителей может быть у двух гауссовых чисел?

(в) Вычислите $\text{НОД}\left(\frac{2}{5}, \sqrt{3}\right)$ в $\mathbb{R}$.

(г) Докажите, что в $\mathbb{R}[x]$ у любых двух (не равных нулю одновременно) многочленов есть наибольший общий делитель, притом не один. Как их все найти?

Задача 12. Вычислите НОД в $\mathbb{R}[x]$: (а) x^2-4x+3 и $2x^2+4x-6$; (б) $\frac{2}{3}x^4+x^3-\frac{1}{4}x^2+1$ и $x^2-x+\frac{1}{2}$; (в)* x^n-1 и x^m-1, $n, m \in \mathbb{N}$.

[1]См. Ар-1.

Геом-4*. Инверсия
(17 декабря 2003 г.)

Но кто хоть немного знает толк в геометрии, не будет оспаривать, что наука эта полностью противоположна тем словесным выражениям, которые в ходу у занимающихся ею.

Платон

Определение 1. Пусть наша «обычная» плоскость — это плоскость xOy в трехмерном пространстве, S^2 — сфера с центром в O радиуса R, $N=(0;0;R)$ — ее «северный полюс». Поместим в N источник света. *Стереографической проекцией* (из северного полюса) называется отображение $\pi_N : S^2 \setminus \{N\} \to xOy$, переводящее точки верхнего полушария в их тени на плоскости xOy, а точки нижнего полушария — в те точки плоскости, которые на них отбрасывают тень (см. рис. 1).

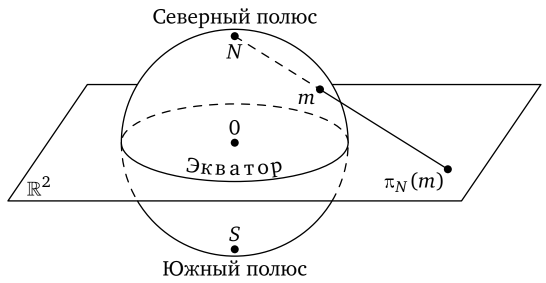

Рис. 1

Задача 1. (а) Во что перейдут при π_N с $R=1$ следующие точки на сфере: S (южный полюс), $(1/3; -2/3; 2/3)$, $(0; \cos\alpha; \sin\alpha)$?

(б) Что будет прообразом при π_N с радиусом 1 следующих точек на плоскости: $(2;0)$, $(1;\sqrt{2})$, $(5;7)$?

(в) Белый медведь прошел 1 км на юг, 1 км на восток и 1 км на север, после чего оказался в том же месте, откуда начал путешествовать. Нарисуйте стереографическую проекцию его пути.

(г)* Тот же вопрос для пингвина.

(д)* Почему стереографическую проекцию не используют для составления карты мира? А какую карту с ее помощью можно хорошо нарисовать?

(е) Нарисуйте на плоскости образ железной дороги «Москва—Петербург» при стереографической проекции (радиус Земли считается равным 1).

(ж) Докажите, что $\pi_N(x; y; z) = \left(\frac{Rx}{R-z}; \frac{Ry}{R-z}\right)$.

(з) Найдите $\pi_N^{-1}(u; v)$.

Определение 2. Назовем *пополненной плоскостью* обычную плоскость с добавленной точкой ∞. (Что все это значит?)

Определение 3. *Инверсией* относительно окружности с центром O и радиусом R называется $\mathrm{Inv}_{O,R} = \pi_S \circ \pi_N^{-1}$, где π_S — стереографическая проекция из южного полюса.

Задача 2. (а) Проверьте, что инверсия является взаимно однозначным преобразованием плоскости без точки O. Доопределите ее так, чтобы она стала взаимно однозначным преобразованием пополненной плоскости.

(б) Дайте определение инверсии в терминах плоской геометрии.

(в) Что представляет из себя $\pi_N^{-1} \circ \mathrm{Inv} \circ \pi_N$:

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "?"] \arrow[d, "\pi_N"] & S^2 \arrow[d, "\pi_N"] \\ xOy \arrow[r, "\mathrm{Inv}"] & xOy? \end{tikzcd}$$

Задача 3. Во что переходят при инверсии с центром в начале координат и радиусом 1

(а) точки $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 4)$, $(3; 4)$, $(-1; 6)$, $(0{,}01; -0{,}01)$, $(2\sin\alpha; 2\cos\alpha)$;

(б) прямые: $x + y = 2$, $y = 3x + 1$;

(в) треугольник с вершинами в точках $(0; 2)$, $(4; 0)$ и $(5; 1)$;

(г) описанные и вписанные окружности четырех единичных квадратов на бумаге в клетку с вершиной в начале координат;

(д) окружность с центром в $(-3; 4)$ радиусом 5 и ее диаметр, задающийся уравнением $y = 4$;

(е) «правая половинка» круга с центром $(3; 1)$ и радиусом 3;

(ж) координатные линии $x = \mathrm{const}$ и $y = \mathrm{const}$?

Задача 4. Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром в точке O. Что произойдет с прямыми и окружностями,

(а) проходящими через O;

(б) не проходящими через O?

(в) Какие окружности перейдут в себя?

Докажите, что инверсия сохраняет

(г) касание, (д) углы.

Задача 5. (а) В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите множество их точек касания.

(б) Через точки A и B проведены окружности S_1 и S_2, касающиеся окружности S, и окружность S_3, перпендикулярная S. Докажите, что S_3 образует равные углы с окружностями S_1 и S_2.

Задача 6. (а) Постройте окружность, касающуюся двух данных окружностей и проходящую через данную точку.

(б) **(Задача Аполлония.)** Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей.

(в) Постройте на данной прямой l такую точку M, что сумма расстояний от нее до данных точек A и B, не лежащих на l, равна заданной величине a.

Задача 7. (а) Докажите, что любую пару непересекающихся окружностей можно инверсией перевести в пару концентрических окружностей, а можно — в пару окружностей равного радиуса.

(б) Пусть окружность R_1 лежит внутри окружности R_2 и $S_1, \ldots, S_n$ — цепочка окружностей, каждая из которых касается R_1 и R_2 (внешним и внутренним образом соответственно) и двух соседних. Докажите, что любую окружность T_1, внешне касающуюся R_1 и внутренне — R_2, можно включить в аналогичную цепочку, при этом точки касания окружностей цепочки друг с другом лежат на одной окружности.

Задача 8 (построения циркулем). Постройте, пользуясь одним только циркулем:

(а) отрезок, в два раза больший данного,

(б) отрезок, в n раз больший данного,

(в) середину данного отрезка,

(г) $\frac{1}{n}$ часть данного отрезка,

(д) образ данной точки при инверсии относительно заданной окружности,

(е) центр окружности по данным трем ее точкам,

(ж) точку пересечения данной окружности и прямой AB,

(з) точку пересечения прямых AB и CD.

Задача 9 (теорема Мора—Маскерони). Докажите, что любое построение, выполнимое с помощью циркуля и линейки, можно выполнить одним циркулем. (Мы считаем, что построить прямую — значит построить пару точек на ней, построить отрезок — значит построить его концы.)

Задача 10. Окружность P_1 с диаметром $AB=b$ касается внутренним образом в точке A окружности P_2 с диаметром $AC=c$. Окружность S_0 с центром на BC диаметра $c-b$ касается P_1 и P_2. Проводятся окружности $S_1, S_2, \ldots$ так, что S_n касается P_1, P_2 и S_{n-1}. Найдите отношение радиуса S_n к расстоянию от ее центра до AC.

Определение 4. «*Окружностями*» на пополненной плоскости называются как обычные окружности, так и прямые с добавленной точкой ∞.

Задача 11. Докажите, что

(а) стереографическая проекция является ограничением подходящей инверсии в пространстве на сферу;

(б) при стереографической проекции «окружностям» на пополненной плоскости соответствуют окружности на обычной сфере;

(в) стереографическая проекция сохраняет углы.

Задача 12. В пространстве даны три черных попарно касающихся сферы и последовательность цветных сфер, каждая из которых касается всех черных и предыдущей цветной. Докажите, что эта последовательность периодична.

Ар-6. Основная теорема арифметики
(24 января 2004 г.)

Определение 1. Целое число $p\neq\pm1$ называется простым, если из $p=ab$ $(a, b\in\mathbb{Z})$ следует, что либо a, либо b равно ±1.

Задача 1 (Евклид).

(а) Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Докажите, что существует бесконечно много положительных простых чисел

(б) вида $4n+3$; (в) не оканчивающихся на 1; (г)* вида $4n+1$.

Эти утверждения являются частными случаями замечательной *теоремы Дирихле*, которая утверждает, что в любой целочисленной арифметической прогрессии со взаимно простыми a_0 и d встречается бесконечно много простых чисел.

Задача 2. Найдите все такие простые p, что (а) $p+57$;

(б) $p+4$ и $p+14$; (в)* p^4+4 — тоже простое (простые).

Если числа p и $p+2$ — простые, то они называются числами-близнецами. Бесконечно ли много чисел-близнецов, — до сих пор не решенная проблема теории чисел.

Задача 3. (а) Докажите, что промежутки между соседними простыми числами могут быть сколь угодно велики.

(б) Придумайте алгоритм, находящий все простые положительные числа, меньшие n, использующий только операции сложения и вычитания.

(в)* Придумайте алгоритм для определения простоты числа n, который требует не более чем $O(\sqrt{n})$ арифметических действий.

Задача 4. Пусть $a, n\in\mathbb{N}$, $a, n\geqslant 2$.

(а) Докажите, что если a^n-1 — простое $(a, n\geqslant 2)$, то $a=2$ и n — простое. Простые числа такого вида называются *числами Мерсенна*.

(б) Докажите, что если a^n+1 — простое $(a, n\geqslant 2)$, то $a \,\vdots\, 2$ и $n=2^k$.

Числа вида $2^{2^k}+1$ называются *числами Ферма*.

(в)* Все ли числа Ферма простые?

До сих пор неизвестно, бесконечно ли много простых чисел среди чисел Мерсенна или чисел Ферма.

Определение 2. Целые числа a и b называются *взаимно простыми*, если у них нет других общих делителей, кроме ±1.

Задача 5. Пусть a и b — взаимно просты. Докажите, что

(а) найдутся такие $x, y\in\mathbb{Z}$, что $ax+by=1$;

(б) $(a\cdot c)\,\vdots\, b \Rightarrow c\,\vdots\, b$;

(в) если p — простое, то $(c\cdot d)\,\vdots\, p \Rightarrow (c\,\vdots\, p)\vee(d\,\vdots\, p)$.

Задача 6 (ОТА). Докажите, что

(а) любое ненулевое целое число n представимо[1] в виде $n=\pm p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots\dots p_k^{\alpha_k}$, где p_i — различные *положительные* простые числа, $\alpha_i\in\mathbb{N}$, а знак произведения совпадает со знаком n;

(б) такое представление единственно (с точностью до порядка сомножителей). Соответствующее разложение мы будем называть *каноническим*.

Задача 7. (а) Сколько положительных делителей у числа 24 696?

(б) Дано каноническое разложение числа $n=\pm p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$. Сколько положительных делителей у числа n?

Задача 8. (а) Найдите выражения для НОД и НОК двух целых чисел через их каноническое разложение. Как быстрее вычислять НОД — по этой формуле или с помощью АЕ?

(б) Докажите, что в натуральных числах $\text{НОД}(a,b)\cdot\text{НОК}(a,b)=a\cdot b$.

Задача 9. Докажите, что

(а) $\sqrt{2}$ — число иррациональное (т. е. $\sqrt{2}\neq\frac{m}{n}$, где n — натуральное и m — целое);

(б) $\sqrt[k]{a}$ $(a,k\in\mathbb{N})$ — число рациональное тогда и только тогда, когда $a=b^k$, где $b\in\mathbb{N}$.

(в) Пусть $x^n=y^m$ $(x,y,n,m\in\mathbb{N})$, n и m — взаимно просты. Докажите, что найдется $t\in\mathbb{N}$, такое что $x=t^m$, $y=t^n$.

(г)* Решите в $\mathbb{N}$ уравнение $x^y=y^x$.

Задача 10. (а) Докажите, что (положительное) простое p входит в каноническое разложение числа $n!$ ровно $[n/p]+[n/p^2]+[n/p^3]+\dots\dots+[n/p^k]+\dots$ раз.

(б) Найдите число нулей на конце числа 2003!.

(в)* Докажите, что $n!\not\vdots\, 2^n$.

(г)* Проведите теоретико-числовое доказательство того, что

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

— целое число.

(д) Докажите, что $\binom{p}{k}\,\vdots\, p$, где p — простое. Верно ли это, когда p — составное?

Определение 3. Выражения вида $k_1+k_2/2^x+k_3/3^x+k_4/4^x+\dots$ называются (формальными) *рядами Дирихле*. Ряды Дирихле можно складывать (покоэффициентно) и перемножать (раскрывая скобки по правилу $m^xn^x=(mn)^x$). Их придумал Дирихле для доказательства своей теоремы (см. выше).

[1]Как всегда, произведение нулевого числа сомножителей полагается равным 1.

Самый важный из этих рядов: $\zeta(x)=1+1/2^x+1/3^x+1/4^x+\dots$ называется *дзета-функцией Римана*[1].

Задача 11*. Вычислите первые десять коэффициентов рядов

(а) $\zeta^2(x)$;

(б) $\zeta(x)\cdot\zeta(x-1)$;

(в) $L(x)\cdot\zeta(x)$, где $L(x)=1-\frac{1}{3^x}+\frac{1}{5^x}-\frac{1}{7^x}\pm\dots$;

(г) $\zeta^{-1}(x)$.

Задача 12*. Докажите, что

(а) $\zeta^2(x)=\sum\nu(n)/n^x$, где $\nu(n)$ — число положительных делителей n;

(б) $\zeta(x)\cdot\zeta(x-1)=\sum\sigma(n)/n^x$, где $\sigma(n)$ — сумма положительных делителей n;

(в)* $4L(x)\zeta(x)=\sum M(n)/n^x$, где $M(n)$ — число целых точек на окружности радиуса $\sqrt{n}$.

(г)* Выведите из предыдущего пункта формулу для количества представлений числа n в виде суммы двух квадратов.

Числа n, которые равны сумме своих положительных делителей (за исключением самого числа n), т. е. для которых $\sigma(n)=2n$, называются *совершенными*. Например, таковы числа 6, 28, 496. Четные совершенные числа просто описываются в терминах чисел Мерсенна, а существование нечетных совершенных чисел остается нерешенной проблемой теории чисел.

Задача 13*. Докажите, что (а) (формула Эйлера)

$$\zeta(x)=\prod_p 1/(1-p^{-x})=\prod_p(1+1/p^x+1/p^{2x}+1/p^{3x}+\dots),$$

где произведение берется по всем положительным простым p;

(б) $L(x)=\prod_{p=4k+1}1/(1-1/p^x)\prod_{p=4k+3}1/(1+1/p^x)$.

Формула Эйлера эквивалентна ОТА. Когда мы получше познакомимся с мультипликативными функциями, мы научимся раскладывать в эйлерово произведение еще много других рядов Дирихле.

[1]Георг Фридрих Бернхард Риман (Riemann), 1826—1866, — выдающийся немецкий математик, внесший огоромный вклад в развитие комплексного анализа, аналитической теории чисел, дифференциальной геометрии и пр. Отметим, впрочем, что придумал дзета-функцию вовсе не Риман, а Эйлер. Зато Риман сформулировал свою знаменитую гипотезу о том, что все нетривиальные комплексные нули дзета-функции лежат на прямой $\operatorname{Re}z=1/2$, которая до сих пор не подтверждена и не опровергнута.

Ар-7. Гауссовы числа
(25 февраля 2004 г.)

Определение 1. *Гауссовым числом* называется пара (a, b) $(a, b \in \mathbb{Z})$. Положим по определению

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{и} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Множество гауссовых[1] чисел обозначается через $\mathbb{Z}[i]$.

Задача 1. (а) Проверьте, что $(0, 1)^2 = (-1, 0)$. Пару $(0, 1)$ мы будем обозначать через i, а пару (a, b) — через $a + bi$.

(б) Проверьте, что это обозначение корректно, т. е. умножение гауссовых чисел соответствует обычному умножению чисел $a + bi$ с условием $i^2 = -1$.

Определение 2. Пусть $z = a + bi$. Число $\bar{z} = a - bi$ называется *сопряженным* к z, а число $N(z) = a^2 + b^2$ — *нормой* z.

Задача 2. Вычислите: (а) i^n и $(-i)^n$; (б) $N((1+i)^n)$ и $N(\overline{(1-i)^n})$.

Задача 3. Докажите свойства:
(а) $\overline{z + w} = \bar{z} + \overline{w}$; $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \overline{w}$;
(б) если $z \,\vdots\, w$, то $\bar{z} \,\vdots\, \overline{w}$;
(в) $N(zw) = N(z)N(w)$; $N(z) = z\bar{z}$;
(г) $z + \bar{z}$ и $z\bar{z}$ — целые.
(д) Выведите признак делимости на $1 + i$ в $\mathbb{Z}[i]$.
(е) Найдите все обратимые[2] элементы в $\mathbb{Z}[i]$.

Задача 4. Что происходит с плоскостью при преобразованиях
(а) $z \to \bar{z}$; (б) $z \to iz$?

Определение 3. Необратимое гауссово число z называется простым, если из $z = ab$ $(a, b \in \mathbb{Z}[i])$ следует, что либо a, либо b обратимо.

Задача 5. Являются ли простыми в $\mathbb{Z}[i]$:
(а) i; (б) 2; (в) $5i$; (г) $3 + 2i$; (д) 7; (е) $7 + i$; (ж) $7 + 8i$?

Задача 6. Докажите, что:
(а) если $N(z)$ — простое (целое) число, то z — простое (гауссово) число. Верно ли обратное?
(б) $z \in \mathbb{Z}[i]$ — простое $\Rightarrow$ $\bar{z}$ — простое. Верно ли обратное?

[1] Если считать $a, b \in \mathbb{R}$, мы получим определение компле́ксных чисел $\mathbb{C}$, но они нам пока не нужны.

[2] Напомним, что $u \in K$ называется *обратимым* в K, если существует такой $v \in K$, что $u \cdot v = v \cdot u = 1$.

Задача 7. Решите уравнения $(z, w \in \mathbb{Z}[i])$ и изобразите решения на плоскости:
(а) $z = \bar{z}$; (б) $z = N(z)$; (в) $z \cdot (2 + 3i) = 3 - 2i$;
(г) $z + w = zw = 2$; (д) $N(z) = 49$, $N(z) = 57$, $N(z) = 55$.

Задача 8. (а) Докажите (используя свойства нормы), что произведение двух чисел, представимых в виде $x^2 + y^2$ тоже представимо в таком виде. Верно ли это для сумм
(б) трех; (в)* четырех квадратов?
Верно ли это для чисел, представимых в виде
(г) $x^2 + 2y^2$, (д) $x^2 + 5y^2$?

Задача 9. Докажите, что
(а) при фиксированном v все $z = vk$ $(k \in \mathbb{Z}[i])$ лежат в вершинах сетки из одинаковых квадратиков;
(б) площадь одного квадратика равна $N(v)$.
(в) Закрасим один из таких квадратиков (как красить стороны?). Докажите, что для любого гауссового числа z найдется ровно одно покрашенное число q такое, что $(z - q) \,\vdots\, v$.

Задача 10. Докажите, что в $\mathbb{Z}[i]$ можно делить с остатком, т. е. для любых $u, v \in \mathbb{Z}[i]$, $v \neq 0$, найдутся гауссовы w и r такие, что $u = vw + r$, где $N(r) < N(v)$. Однозначно ли деление с остатком в $\mathbb{Z}[i]$?

Задача 11. Сформулируйте и докажите ОТА в $\mathbb{Z}[i]$.

Наравне с $\mathbb{Z}[i]$ — числами вида $a + bi$ — можно для любого $n \in \mathbb{N}$ рассматривать $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ — числа вида $a + b\sqrt{-n}$.

Задача 12. (а) Дайте (формальное) определение $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
(б) Определите здесь норму и сопряженный элемент.
(в) Для каждого n найдите все обратимые элементы.
(г) Найдите все разложения на простые сомножители числа 21 в $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ (с точностью до умножения на обратимые).
(д) Можно ли делить с остатком (с выше определенной нормой) и
(е) верна ли ОТА в $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$?

Ар-8. Сравнения
(10 марта 2004 г.)

Задача 1. (а) Чтобы решить, кто будет нести каны в алтайском походе, Саша Л., Саша М., Саша Р. и Саша Ч. решили встать в круг и прочитать (в этом порядке) по слогам считалку «Долго ль мне гулять на свете», начав с Саши Л. На ком закончится — тому и нести. Кто это будет?

(б) Сколько будет времени через 1000 часов после сдачи этой задачи?

Определение 1. Числа a и b называются *сравнимыми по модулю m*, если $(a-b) \vdots m$. Обозначение: $a \equiv b \pmod m$.

Задача 2. Нарисуйте

(а) на числовой прямой целые a, для которых $a \equiv -2 \pmod 7$; $a \equiv 1000 \pmod{24}$; $a \equiv 256 \pmod{(-4)}$;

(б)* на плоскости гауссовы u такие, что $u \equiv -i \pmod{1+2i}$; $u \equiv 2-3i \pmod i$.

Опишите все

(в) многочлены,

(г) ряды $P(x)$ такие, что $P \equiv 2004 \pmod{x^2}$; $P \equiv x+1 \pmod{(x+1)}$.

Задача 3. Докажите свойства сравнений:

(а) сравнение — отношение эквивалентности;

(б) если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $ac \equiv bd \pmod m$;

(в) если $P \in \mathbb{Z}[x]$ и $a \equiv b \pmod m$, то $P(a) \equiv P(b) \pmod m$;

(г)* если p — простое, то $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$ $(p \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{Z})$; выполняется ли это при составных p?

(д)* **(Малая теорема Ферма)** $a^p \equiv a \pmod p$ для любого простого $p \in \mathbb{N}$.

Задача 4. Докажите, что

(а) $a \equiv b \pmod m \iff a$ и b имеют одинаковые остатки от деления на m;

(б) максимальное число попарно не сравнимых по модулю m целых чисел равно m;

(в)* максимальное число попарно не сравнимых по модулю w гауссовых чисел равно $N(w)$;

(г) среди любых 2004 целых чисел найдутся два числа, разность которых делится на 2003, несколько чисел, сумма которых делится на 2004;

(д)* среди любых 2004 гауссовых чисел найдутся два, разность которых делится на $17i-41$, несколько чисел, сумма которых делится на $27-35i$.

Когда числа интересуют только с точностью до сравнения по модулю некоторого фиксированного числа m (как в задаче 1 и др.), полезно «склеить» сравни́мые числа. Для этого достаточно рассмотреть множество классов эквивалентности относительно отношения сравнения по данному модулю. Эти классы можно описать явно с помощью следующего выбора представителей.

Определение 2. Пусть m — натуральное число, $m > 1$. Обозначим через $\mathbb{Z}_m$ множество $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ остатков от деления на m, а через $\overline{n}$ — остаток от деления $n \in \mathbb{Z}$ на m. Для $a, b \in \mathbb{Z}_m$ определим «сумму» и «произведение»: $a+b = \overline{a+b}$, $a \cdot b = \overline{a \cdot b}$.

Задача 5. (а) Проверьте, что $\overline{a} = \overline{b} \iff a \equiv b \pmod m$.

Нарисуйте таблицы сложения и умножения в

(б) $\mathbb{Z}_4$; (в) $\mathbb{Z}_7$; (г) $\mathbb{Z}_8$; (д) $\mathbb{Z}_9$.

Задача 6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы (а) трех квадратов; (б) трех кубов.

Задача 7. Докажите, что

(а) $(n^5 - 5n^3 + 4n) \vdots 120$ $(n \in \mathbb{Z})$;

(б) $(5555^{2222} + 2222^{5555}) \vdots 7$;

(в) $(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}) \vdots 19$ $(n \in \mathbb{N})$;

(г) $1^{57} + 2^{57} + \ldots + 1000^{57} \vdots 1001$;

(д) $(a^2+b^2) \vdots 7$ $(a, b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (a^2+b^2) \vdots 49$ $(a, b \in \mathbb{Z})$;

(е) если нечетное число представимо в виде суммы двух квадратов, то оно имеет вид $4k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Задача 8. (а) Найдите последнюю цифру числа $14^{14^{14}}$.

(б) Возведя некоторое натуральное число n в 13-ю степень получили число 21 982 145 917 308 330 487 013 369. Чему равно n?

Задача 9. Придумайте и докажите признаки делимости[1] на

(а) 3 и 9; (б) 11; (в) 7; (г)* 57.

Задача 10.

(а) Докажите, что уравнение $x^{12} - 57x^7 + 91 = 0$ не имеет целочисленных решений.

(б) Пусть $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, и оба числа $P(0)$ и $P(1)$ нечетны. Докажите, что тогда уравнение $P(x) = 0$ не имеет целочисленных решений.

[1] Признаком делимости на n мы здесь называем такую последовательность целых чисел k_i $(|k_i| \leqslant n/2)$, что $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0} \vdots n \Leftrightarrow (a_n k_n + a_{n-1} k_{n-1} + \ldots + a_0 k_0) \vdots n$. Например, для признака делимости на 3 все k_i равны 1. Конечно, есть много разных других признаков делимости.

(в) Докажите, что уравнение $7x^2+2=y^3$ не имеет целочисленных решений;

(г)* Докажите, что уравнение $x^5+y^5+z^5+t^5=5$ не имеет целочисленных решений.

Определение 3. Пусть $a\in K$ (K — кольцо). Тогда a называется *делителем нуля*, если $a\neq 0$ и найдется такое $b\in K$, $b\neq 0$, что $a\cdot b=0$. Например, в $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ нет делителей нуля.

Задача 11. Докажите, что делителей нуля нет и в (а) $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$;

(б) $\mathbb{R}[[x]]$; в) $\mathbb{Z}[i]$.

(в) При каких m в $\mathbb{Z}_m$ есть делители нуля?

(г) Верна ли теорема о степени произведения многочленов в $\mathbb{Z}_6[x]$?

Научимся решать простейшие сравнения вида $ax\equiv b \pmod m$, т. е. линейные уравнения в $\mathbb{Z}_m$, или, что то же самое, находить целочисленные решения уравнения $ax-my=b$.

Задача 12. Пусть $d=\text{НОД}(a,m)$. Докажите, что

(а) сравнение $ax\equiv b \pmod m$ имеет решения тогда и только тогда, когда $b\,\vdots\, d$;

(б) если $b\,\vdots\, d$, то сравнение имеет ровно d решений в $\mathbb{Z}_m$; причем если x_0 — одно из них, то все другие решения — это

$$x_0+m',\ x_0+2m',\ \ldots,\ x_0+(d-1)m',$$

где $m'=m/d$.

(в) Придумайте алгоритм для нахождения хотя бы одного решения x_0.

(г) Найдите все решения в $\mathbb{Z}$ уравнения $29x-13y=2$.

(д)* Проведите полное исследование уравнения

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\equiv b \pmod m.$$

Геом-5*. Целочисленные решетки
(3 апреля 2004 г.)

Задача 1. (а) Докажите, что нельзя нарисовать правильный треугольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги.

(б) При каких n существует правильный n-угольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги?

Определение 1. *Целочисленной решеткой* называется множество точек плоскости с целыми координатами. Будем обозначать такую решетку через L.

Определим *сумму* точек: $(a,b)+(c,d)\overset{\text{def}}{=}(a+c,b+d)$. Аналогично определяется умножение точки на целое число.

Линейным преобразованием целочисленной решетки называется такое отображение $A\colon L\to L$, что $A(P+Q)=A(P)+A(Q)$ для любых $P,Q\in L$.

Задача 2. Докажите следующие свойства линейных преобразований.

(а) $A(0)=0$ (где $0\overset{\text{def}}{=}(0,0)$ — начало координат), $A(-P)=-A(P)$.

(б) $A(n\cdot P)=n\cdot A(P)$, $n\in\mathbb{Z}$.

(в) Всякое линейное преобразование A однозначно задается точками $A(1,0)$ и $A(0,1)$.

(г) Всякое линейное преобразование задается формулой

$$A(x,y)=(ax+by,cx+dy),\quad \text{где } a,b,c,d\in\mathbb{Z}.$$

(д) Такое преобразование инъективно тогда и только тогда, когда $ad-bc\neq 0$.

(е) Такое преобразование сюръективно тогда и только тогда, когда $ad-bc=\pm 1$.

Задача 3. (а) Дан параллелограмм $POQR$ с вершинами в L. Докажите, что его площадь равна $|ad-bc|$, где $P=(a,b)$, $Q=(c,d)$. (O — начало координат.)

(б) Пусть отрезок с концами в узлах решетки не содержит других ее вершин. Докажите, что он является стороной некоторого параллелограмма площади 1 с вершинами в узлах решетки.

(в) На клетчатой бумаге нарисован параллелограмм с вершинами в узлах сетки так, что внутри него и на сторонах нет других узлов сетки. Докажите, что площадь параллелограмма равна 1.

Задача 4 (формула Пика). Докажите, что площадь S многоугольника с вершинами в узлах сетки равна $S=n+\frac{m}{2}-1$, где n — число узлов сетки внутри многоугольника, m — число узлов сетки на контуре многоугольника.

Определение 2. Взаимно однозначные линейные преобразования L называются *линейными автоморфизмами*. Множество тех линейных автоморфизмов целочисленной решетки, для которых $ad-bc=1$, обозначается через $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$.

Задача 5. Проверьте, что: (а) $A, B \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow A \circ B \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$;
(б) $A \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow A^{-1} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$.

Эти две задачи показывают, что $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ является *группой*.

(в) Сформулируйте и докажите: линейные автоморфизмы L сохраняют площади фигур.

(г) Сохраняют ли они ориентацию?

Задача 6. (а) Стороны прямоугольника равны m и n и проходят по линиям сетки. Сколько клеток пересечет диагональ?

(б) Даны две точки на L: (a_1, b_1) и (a_2, b_2). Когда одну из них можно перевести в другую линейным автоморфизмом?

Будем рассматривать такие параллелограммы с вершинами в узлах сетки, что одна из их вершин есть точка $(0, 0)$.

(в) Докажите, что любой такой параллелограмм площади 1 можно перевести с помощью преобразования из $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ в любой другой такой параллелограмм площади 1.

(г) Докажите, что если площадь параллелограмма равна 2, то его можно перевести в один из двух параллелограммов, изображенных на рис. 1, а перевести их друг в друга нельзя.

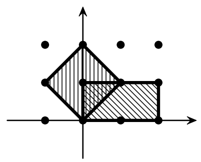

Рис. 1

Задача 7. Расклассифицируйте с точностью до $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$-эквивалентности параллелограммы площади (а) 19; (б) 4.

Задача 8. На клетчатую бумагу посажена клякса площади S. Докажите, что

(а) если $S < 1$, то можно параллельно перенести кляксу так, чтобы она не закрывала узлов сетки;

(б) если S целое, то можно перенести кляксу так, чтобы она закрывала не менее S узлов сетки, а можно — что не более S узлов;

(в) **(лемма Минковского)** если клякса выпукла и симметрична относительно начала координат, а $S > 4$, то клякса закрывает еще хотя бы один узел сетки (кроме начала координат).

Задача 9. В круглом саду радиуса 1 километр деревья рассажены в вершинах квадратной сетки со стороной квадратов 1 метр. Единственная вершина сетки, в которой нет дерева — центр сада. Радиус каждого дерева равен 1 миллиметру. Докажите, что вид из центра сада полностью заслонен.

Определение 3. Пусть m — свободное от квадратов[1] натуральное число. Обозначим через $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ множество пар (a, b) целых чисел (или множество точек на координатной плоскости с целыми координатами), которые умножаются по правилу: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + mbd, ad + bc)$. (a, b) естественно обозначить через $a + b\sqrt{m}$.

Нормой в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ называется величина $N(a + b\sqrt{m}) = a^2 - mb^2$.

Задача 10. Пусть $z, w \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$. Докажите, что
(а) $N(zw) = N(z)N(w)$;
(б) $N(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $N(z) = \pm 1 \Leftrightarrow z$ обратимо;
(в) если

$$a_1 \equiv a_2 \pmod N, \quad b_1 \equiv b_2 \pmod N,$$

то $(a_1 + b_1\sqrt{m}) \vdots (a_2 + b_2\sqrt{m})$, где $N = N(a_2 + b_2\sqrt{m})$.

Задача 11. (а) Нарисуйте на плоскости множество M_c точек, задаваемое уравнением $x^2 - my^2 = c$.

(б) Докажите, что M_c — гипербола.

(в) Стороны параллелограмма параллельны прямым $x = \pm\sqrt{m}y$, его вершины лежат на $M_c \cup M_{-c}$. Найдите его площадь.

Задача 12 (уравнение Пелля). Докажите, что:

(а) для некоторого c неравенство $|x^2 - my^2| < c$ имеет бесконечно много решений;

Hint. Впишите в $M_c \cup M_{-c}$ параллелограмм как в 11 (в) и примените лемму Минковского.

(б) для некоторого c существует бесконечно много чисел с нормой c;

(в) уравнение $N(z) = 1$ в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ имеет решения, отличные от ± 1;

(г) существует такое $z_0 = a_0 + b_0\sqrt{m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, что все элементы с нормой 1 имеют вид $\pm z_0^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

При условиях $a_0, b_0 > 0$ число z_0 называют *основным решением* уравнения $x^2 - my^2 = 1$.

Решите уравнения: (д) $x^2 - 5y^2 = 1$, (е) $x^2 - 41y^2 = 1$.

[1]То есть m не делится ни на одно число вида d^2 при $d > 1$.

Ар-9. Арифметика остатков
(24 марта 2004 г.)

Задача 1. Пусть $a \in \mathbb{Z}_p$ (p — простое). Отметим $p-1$ точку на плоскости, и расставим на них элементы $\mathbb{Z}_p$ (кроме нуля). Соединим стрелкой точку x с точкой $a \cdot x$. Мы получим *диаграмму умножения на* a.

(а) Нарисуйте такую диаграмму для $p=13$, $a=5$; $p=7$, $a=3$.

Докажите, что:

(б) в каждую вершину диаграммы ведет ровно одна стрелка;

(в) диаграмма умножения представляет собой объединение непересекающихся циклов;

(г) все циклы имеют одинаковую длину;

(д)* найдется такой элемент $a \in \mathbb{Z}_p$, что диаграмма умножения на a состоит ровно из одного цикла.

(е) Какие из предыдущих пунктов будут верны для диаграммы умножения на a в Z_m при произвольном m?

Задача 2. (а) При каких m все ненулевые элементы $\mathbb{Z}_m$ обратимы[1]?

(б) Опишите множество $\mathbb{Z}_m^*$ — обратимых элементов из $\mathbb{Z}_m$ при произвольном m.

(в)* Сформулируйте и докажите свойства диаграмм умножения для $\mathbb{Z}_m^*$. Нарисуйте диаграмму умножения для $m=30$, $a=7$.

(г) Докажите, что числитель дроби $1+1/2+1/3+\ldots+1/(p-1)$ делится на p (p — простое).

Задача 3 (следствия из свойств диаграмм). Пусть a — целое число. Докажите, что

(а) если p — простое, то $a \not\,\vdots\, p \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \colon a^n \equiv 1 \pmod p$;

Определение 1. Минимальное натуральное n для которого

$$a^n \equiv 1 \pmod p,$$

называется *порядком* a в $\mathbb{Z}_p$ и обозначается через $\mathrm{ord}_p(a)$. ч

(б) $a^n \equiv 1 \pmod p \Rightarrow n \,\vdots\, \mathrm{ord}_p(a)$ ($n \in \mathbb{N}$).

(в)* **(теорема Эйлера)** $\text{НОД}(a,m)=1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$, где $\varphi(m)$ — количество чисел от 1 до $|m|$, взаимно простых с m. (Как вы, наверное, уже догадались, $\varphi(m)$ называется *функцией Эйлера*.)

Задача 4 (следствия теорем Ферма—Эйлера). Пусть $p>2$ — простое. Докажите, что

(а) существует число вида $111\ldots11$, кратное p ($p \neq 5$);

[1]Кольцо, в котором все ненулевые элементы обратимы, называется *полем*.

(б) длина периода разложения $1/p$ в периодическую дробь делит $p-1$ ($p \neq 5$);

(в) любой простой делитель числа 2^p-1 имеет вид $2kp+1$.

Задача 5. Существует ли натуральная степень тройки, оканчивающаяся на 0001?

Задача 6* (числа Карлмайкла). Докажите, что для составного числа 561 справедливо утверждение малой теоремы Ферма:

$$\text{НОД}(a, 561) = 1 \;\Rightarrow\; a^{560} \equiv 1 \pmod{561}.$$

Числа, для которых верно утверждение малой теоремы Ферма, называются *числами Карлмайкла*.

Задача 7*. Пусть $p>2$ — простое.

(а) Разложите многочлен $x^{p-1}-1$ на множители в $\mathbb{Z}_p$.

(б) Докажите, что если $(p-1) \,\vdots\, d$, то сравнение $x^d \equiv 1 \pmod p$ имеет ровно d решений в $\mathbb{Z}_p$.

(в) Докажите, что в $\mathbb{Z}_p$ найдется такой элемент a, что $\mathrm{ord}_p(a)=p-1$. (Заметим также, что мультипликативная группа любого конечного поля циклична.)

Определение 2. Корень α ($\alpha \in \mathbb{C}$) n-й степени из 1 называется первообразным, если $\alpha^k \neq 1$ ни при каком k, $1 \leqslant k < n$.

Задача 8. (а) Докажите, что всякий корень n-й степени из 1 есть натуральная степень первообразного корня α.

(б) Найдите все первообразные корни из 1 степени 4, 8, 6, 12 и 24.

(в) Докажите, что число первообразных корней n-й степени из 1 равно $\varphi(n)$.

Задача 9*. Найдите сумму k-х степеней всех корней n-й степени из 1.

Задача 10 (квадратные уравнения).

(а) Сколько квадратов в $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$?

Пусть p — простое.

(б) Докажите, что уравнение $x^2=a$ имеет не более двух решений в $\mathbb{Z}_p$; при каких a решение единственно?

(в) Сколько квадратов в $\mathbb{Z}_p$?

(г) Докажите, что уравнение $x^2+ax+b=0$ разрешимо в $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда a^2-4b — полный квадрат в $\mathbb{Z}_p$. Напишите формулу для нахождения корней.

Задача 11. Пусть $p>2$ — простое. Докажите теоремы:

(а) **(Вильсона)** $(p-1)! \equiv -1 \pmod p \Leftrightarrow p$ — простое;

(б) **(Лейбница)** $(p-2)! \equiv 1 \pmod p \iff p$ — простое;

(в)* **(Клемента)** числа p и $p+2$ являются простыми-близнецами тогда и только тогда, когда $4((p-1)!+1)+p \equiv 0 \pmod{p^2+2p}$.

До сих пор неизвестно, бесконечно ли много существует простых-близнецов: $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$, $(17,19)$, $(29,31)$, $(41,43)$…

Задача 12 (квадратичные вычеты). Пусть $p>2$ — простое. Докажите, что в $\mathbb{Z}_p$

(а) произведение двух квадратов — квадрат;

(б) произведение квадрата и неквадрата[1] — неквадрат;

(в) произведение двух неквадратов — квадрат;

(г) при $a \neq 0$ $(a \in \mathbb{Z}_p)$ элемент $a^{p-1/2}$ равен либо 1, либо -1;

(д) каждое из уравнений $x^{p-1/2}=1$ и $x^{p-1/2}=-1$ имеет по $\dfrac{p-1}{2}$ решений;

(е) $a \neq 0$ является квадратом тогда и только тогда, когда $a^{p-1/2}=1$.

(ж)* При каких простых p число 2 является квадратом в $\mathbb{Z}_p$?

[1]«Это теперь твое новое имя! — сказал Заяц. — Я всю ночь думал: как бы тебя назвать? И наконец придумал: МЕДВЕЖОНОККОТОРЫЙДРУЖИТСЗАЙЦЕМ!»

Десятый класс

Ар-10*. Избранные задачи по теории чисел
(7 сентября 2004 г.)

Задача 1. Найдите все пары таких взаимно простых чисел a и b, что $\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2}=\dfrac{3}{13}$.

Задача 2. Дано множество из n натуральных чисел. За одну операцию можно любые два числа из этого множества заменить на их НОД и НОК.

(а) Докажите, что можно провести только конечное число операций.

(б) Докажите, что окончательный результат не зависит от порядка действий.

Задача 3. Решите уравнения в целых числах:

(а) $3^m+7=2^n$; (б) $3\cdot 2^m+1=n^2$; (в) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$.

Задача 4. Какую наименьшую сумму цифр может иметь число вида $3n^2+n+1$ при натуральном n?

Задача 5. На столе лежат книги, которые надо упаковать. Если их связать в одинаковые пачки по 4, по 5 или по 6 книг, то каждый раз останется одна лишняя книга, а если связать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может быть на столе?

Задача 6 (китайская теорема об остатках). Натуральные числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты, $m=m_1\cdot\ldots\cdot m_n$.

(а) Докажите, что сравнение $x \equiv b \pmod m$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} x \equiv b \pmod{m_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv b \pmod{m_n}. \end{cases}$$

(б) Докажите, что система

$$\begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv b_n \pmod{m_n}. \end{cases}$$

имеет, и притом единственное, решение в $\mathbb{Z}_m$ при любых $b_1, \ldots, b_n$.

Фактически мы доказали, что $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_n}$.

(в) Придумайте явную формулу для решения предыдущей системы при $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0$.

Задача 7 (больное войско). Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре. Но некоторые из солдат (от 1 до 37) находятся в лазарете, и генерал не знает, сколько именно. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение.

Например, войско из 9 человек можно поставить в виде квадрата 3×3; если один человек болен, то в виде двух квадратов 2×2; если же больны двое, то построиться не удастся.

Задача 8. (а) Докажите, что a обратимо в $\mathbb{Z}_m$ тогда и только тогда, когда a обратимо в каждом $\mathbb{Z}_{m_i}$.

Другими словами, $\mathbb{Z}_m^* \cong \mathbb{Z}_{m_1}^* \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_n}^*$.

(б) Сколько элементов в $\mathbb{Z}_{2004}^*$? В $\mathbb{Z}_{1771}^*$?

(в) Найдите $\mathrm{ord}_{2004}(5)$, $\mathrm{ord}_{1771}(16)$.

Задача 9. (а) Вычислите $\varphi(p^k)$, p простое.

(б) Покажите, что $\varphi(m) = \varphi(m_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(m_n)$ для попарно взаимно простых m_i.

(в) Выведите явную формулу для $\varphi(n)$.

Задача 10*. Рассмотрим последовательности:

$$a_n: 1\ \ 3\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 9\ \ 11\ \ 12\ \ 14\ \ 16\ldots \quad \text{и}$$
$$b_n: 2\ \ 5\ \ 7\ \ 10\ \ 13\ \ 15\ \ 18\ \ 20\ \ 23\ \ 26\ldots$$

(а) Установите закономерность, по которой они образованы.

(б) Докажите формулу: $a_n = \left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}n\right]$ и придумайте похожую формулу для b_n.

(в) Выведите аналогичные формулы для последовательностей

$$1\ \ 2\ \ 4\ \ 5\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 11\ \ 12\ \ 14\ldots \quad \text{и}$$
$$3\ \ 6\ \ 10\ \ 13\ \ 17\ \ 20\ \ 23\ \ 27\ \ 30\ \ 34\ldots$$

Hint. Обратите внимание, что

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1} = 1.$$

Задача 11. Обозначим через $\Phi_n(x)$ многочлен

$$(x-\varepsilon_1)\cdot\ldots\cdot(x-\varepsilon_{\varphi(n)}),$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ — все первообразные корни из 1 степени n.

(а) Вычислите $\Phi_n(x)$ для первых 12 значений n.

(б) Докажите, что многочлен $\Phi_n(x)$ имеет целые коэффициенты. Каков его свободный член?

(в) Докажите равенство $x^n - 1 = \prod\limits_{d|n} \Phi_d(x)$.

(г)* Выведите из этого равенства формулу для $\Phi_n(x)$.

(д)* Докажите, что многочлены $\Phi_n(x)$ неприводимы над $\mathbb{Z}$.

Задача 12*. (а) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы четырех четвертых степеней.

(б) Докажите, что при $n > 10^8$ не верно равенство $\dfrac{S(n)}{n} < \dfrac{1}{20}$, где $S(n)$ — количество натуральных чисел, представимых в виде суммы четырех четвертых степеней и не превосходящих n.

Программа зачета по курсу арифметики

(«В» класс. 2004/2005)

1. Деление с остатком и Алгоритм Евклида в $\mathbb{Z}$. НОД и НОК в $\mathbb{Z}$.
2. Деление с остатком и Алгоритм Евклида в $\mathbb{R}[x]$. НОД двух многочленов.
3. Теорема Безу. Корни многочленов и разложение на множители, число корней.
4. Основная теорема алгебры (формулировка). Неприводимые многочлены в $\mathbb{R}[x]$.
5. Интерполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа.
6. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах в $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{Z}[x]$.
7. Простые в $\mathbb{Z}$. Основная теорема арифметики в $\mathbb{Z}$.

8*. Простые в $\mathbb{Z}[i]$. Представления в виде суммы двух квадратов в $\mathbb{Z}$.

9*. Деление с остатком и Основная теорема арифметики в $\mathbb{Z}[i]$.

10. Полное исследование уравнения $ax+by=d$ в $\mathbb{Z}$. Алгоритм нахождения частного решения.
11. Пифагоровы треугольники.
12. $\mathbb{Z}_m$, делители нуля и обратимые элементы. Свойства сравнений.
13. Решение линейных сравнений в $\mathbb{Z}_m$. Полное исследование.

14*. Китайская теорема об остатках (в $\mathbb{Z}$).

15. Теорема Эйлера (в $\mathbb{Z}_m$). Первообразные корни из единицы.

16*. Функция Эйлера (явная формула).

17. Квадраты и неквадраты в $\mathbb{Z}_p$.

Звездочкой отмечены вопросы, входящие в полную программу экзамена, но не входящие в ее сокращенный вариант.

Ан-1. Аксиомы действительных чисел

(25 сентября 2004 г.)

> Среди всех мудрецов первое место занимают грамматики — порода людей, несчастнее которой, злополучнее и ненавистнее не было бы на свете, если бы я (глупость) не скрашивала тягот их ремесла некоторым сладким безумием.
>
> *Эразм Роттердамский*

Определение 1. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством *действительных* (*вещественных*) чисел, если выполнены следующие условия.

1. Аксиомы сложения

Определено отображение (*операция сложения*)

$$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},$$

такое что:

1) в $\mathbb{R}$ существует «особый» (по отношению к операции «+») такой элемент 0, что
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad x+0=0+x=x.$$
2) $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}$, такой, что
$$x+y=y+x=0.$$
Элемент y называется *противоположным* к x и обозначается через «$-x$».
3) «+» — ассоциативная операция, т. е. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$
$$x+(y+z)=(x+y)+z.$$
4) «+» — коммутативная операция, т. е. $\forall x,y\in\mathbb{R}$
$$x+y=y+x.$$

Аксиомы 1.1—1.3 означают, что действительные числа образуют *группу по сложению*; аксиома 1.4 означает, что эта группа *коммутативна* (или, по-другому, *абелева*).

2. Аксиомы умножения

Определено отображение (*операция умножения*)

$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},$$

такое, что:

1) ($\mathbb{R}$ — кольцо) умножение дистрибутивно по отношению к сложению, т. е. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z;$$
2) (ассоциативное) «$\cdot$» — ассоциативная операция, т. е. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$
$$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z;$$
3) (с единицей) в $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ существует «особый» (по отношению к операции «$\cdot$») такой элемент 1, что
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad x\cdot 1 = 1\cdot x = x;$$
4) ($\mathbb{R}$ — тело) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\exists y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, такой что
$$x\cdot y = y\cdot x = 1.$$
Элемент y называется *обратным* к x и обозначается через x^{-1}.
5) ($\mathbb{R}$ — поле) «$\cdot$» — коммутативная операция, т. е. $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$$x\cdot y = y\cdot x.$$

Итак, множество, отвечающее всем условиям 1.1—1.4 и 2.1—2.5 называется *полем*. Например, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ (p — простое) являются полями, а $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}_{57}$ — нет (почему?).

3. Аксиомы порядка

Между элементами $\mathbb{R}$ имеется *отношение порядка*, т. е. такое отношение «$\leqslant$», для которого выполнено:

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $(x \leqslant x)$,
2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $(x \leqslant y)\wedge(y \leqslant x) \Rightarrow (x = y)$,
3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x \leqslant y)\wedge(y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$.

Множество, отвечающее условиям 3.1—3.3, называется *частично упорядоченным*.

Если же любые два элемента этого множества сравнимы, т. е.

4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $(x \leqslant y)\vee(y \leqslant x)$, то множество называется *линейно упорядоченным*.

4. Связь сложения и порядка

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant y) \Rightarrow (x+z \leqslant y+z).$$

5. Связь умножения и порядка

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (0 \leqslant x)\wedge(0 \leqslant y) \Rightarrow (0 \leqslant x\cdot y).$$

Все вышеперечисленные условия задают *упорядоченное поле*. Например, таким будет $\mathbb{Q}$, но не $\mathbb{C}$ или $\mathbb{Z}_p$ (почему?). Существует много разных упорядоченных полей (например?). Добавим еще одну аксиому (зачем?).

6. Аксиома полноты

Определение 1. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если найдется такое $C \in \mathbb{R}$, что $\forall x \in X$ $x \leqslant C$. Число C в этом случае называется *верхней границей* множества X.

Наименьшая из верхних границ называется *точной верхней границей* (*верхней гранью*). Точнее:

Определение 2. Число c называется точной верхней границей множества X, если:

1) c — верхняя граница множества X;
2) для любой верхней границы C множества X верно, что $c \leqslant C$.

Обозначается это так: $c = \sup X$, или так: $c = \sup\limits_{x\in X} x$.

Заметим, что верхняя граница c множества X тогда и только тогда является точной, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in X$ $c - \varepsilon < x$ $(\leqslant c)$ (проверьте!).

Аксиома. Для любого (непустого) ограниченного сверху подмножества X множества $\mathbb{R}$ существует точная верхняя граница $c \in \mathbb{R}$.

Полученная система аксиом (1)–(6) является

1° непротиворечивой, т. е. из нее нельзя вывести никакого утверждения вместе с его отрицанием;
2° любые два множества, удовлетворяющие нашим аксиомам, *изоморфны*, т. е. между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, переводящее сумму элементов в сумму, произведение в произведение, и притом сохраняющее порядок $\leqslant$.

Ан-2. Первые следствия аксиом
(28 сентября 2004 г.)

«You may call it ‘nonsense’ if you llke», she said, «but I’ve heard nonsense, compared with which that would be as sensible as a dictionary!»

Lewis Carroll. Through the Looking Glass

Задачи в этом листке очень просты и требуют лишь немного аккуратности. Перед решением задачи подумайте хорошенько, что же в ней спрашивается.

Задача 1 (групповые/арифметические свойства).

(а) Докажите, что в $\mathbb{R}$ есть только один нуль, только один противоположный элемент. Докажите, что уравнение $a+x=b$ имеет ровно одно решение в $\mathbb{R}$.

(б) Сформулируйте и докажите аналогичные свойства операции умножения.

(в) Объясните, почему предыдущий пункт (про «докажите») можно было не решать.

(г) Докажите, что $(-x)=(-1)x$, $(-1)^2=1$.

Задача 2 (порядок и операции).

(а) Определите на $\mathbb{R}$ отношения $\geqslant$, $>$, $<$. Какие из них являются отношениями порядка? (Догадайтесь сами, что это значит.)

(б) Докажите, что для любых двух действительных чисел x и y верно ровно одно из утверждений: $x<y$, $x=y$, $x>y$.

(в) Докажите, что $1>0$.

(г) Докажите, что неравенства можно складывать и умело умножать на числа. Можно ли вычитать неравенства? Можно ли их перемножать и делить?

Вы, конечно, знаете, что такое натуральные числа — это числа $1, 2, 3, \ldots$ Постарайтесь не забыть этого после решения последующих задач.

Задача 3 (натуральные числа).

(а) На множествах тоже есть одно очевидное отношение[1]: $\subset$. Докажите, что $\subset$ — отношение порядка.

Определение 1. Множество X называется *индуктивным*, если

$$x\in X \;\Rightarrow\; x+1\in X.$$

[1]Раньше его обозначали еще как $\subseteq$; $A\subset B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a\in A \Rightarrow a\in B)$.

Определение 2. Множеством *натуральных чисел* называется наименьшее индуктивное подмножество, содержащее 1. Обозначается это множество через $\mathbb{N}$.

(б) Докажите, что в $\mathbb{R}$ есть непустые индуктивные подмножества. (Многоточия и фразы типа «и так далее» в решении запрещаются.)

(в) Проверьте корректность определения 2.

Задача 4 (издевательства).

(а) **(Индукция.)** Докажите *принцип математической индукции*: если подмножество M натуральных чисел содержит единицу и вместе с каждым элементом x содержит и $x+1$, то $M=\mathbb{N}$.

(б) Как можно доказать то, что на самом деле аксиома?

(в) Докажите, что из такого принципа индукции следует принцип индукции из Ар-2.

(г) Докажите, что принцип индукции из Ар-2 эквивалентен утверждению о том, что любое непустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

(д) $2\times 2=4$ — что это? Аксиома, определение, теорема или недоказуемое утверждение?

Задача 5 (как устроены натуральные числа).

(а) Докажите, что число 57 — натуральное[1].

(б) Докажите, что сумма и произведение натуральных чисел — тоже натуральное число.

(в) Докажите, что между n и $n+1$ ($n\in\mathbb{N}$) нет натуральных чисел.

После решения этой задачи уже легко поверить, что мы сейчас определили тот самый абелев моноид, который вы исследовали в старшей группе детского сада.

Задача 6 (целые и рациональные числа).

(а) Определите *целые числа* ($\mathbb{Z}$) и докажите, что они образуют кольцо.

(б) Определите *рациональные числа* ($\mathbb{Q}$) и докажите, что они образуют поле.

Больше этого без аксиомы полноты мы ничего не получим. Сейчас она нам понадобится, чтобы убедиться в существовании иррациональных чисел и доказать принцип Архимеда.

Задача 7 (иррациональные числа). (а) Пусть

$$x=\sup\{t \mid t>0\wedge t^2<2\}.$$

Докажите, что это действительное число x корректно определено и $x=\sqrt{2}$ (арифметический корень).

[1]Если вы этого не знаете, то напомним: $57\overset{\text{def}}{=}56+1$.

(б) Докажите, что существуют иррациональные числа (только дайте сначала их определение).

Задача 8 (принцип Архимеда[1]).

(а) Множество натуральных чисел неограниченно сверху.

(б) **(Принцип Архимеда.)** Если идти с постоянным шагом в нужную сторону, то можно дойти куда угодно:

$$\forall h > 0\ \forall x \in \mathbb{R}_+\ \exists! n \in \mathbb{N}\colon (n-1)h < x \leqslant nh.$$

Объясните геометрический смысл происходящего. Подумайте, почему такое объяснение не будет доказательством в нашей аксиоматике.

(в)* Приведите пример упорядоченного поля (или хотя бы упорядоченной абелевой группы), где неверен принцип Архимеда.

[1]Архимед ($A\rho\chi\iota\mu\eta\delta\eta\zeta$), 287—212 гг. до Р. Х., — великий греческий математик, широко известный в народе своими физическими экспериментами.

Ан-3. Последовательности
(13 ноября 2004 г.)

> Вновь наступающее всегда расположено следовать за предшествующим. Это ведь не перечисление какое-то отрывочное и всего лишь принудительное, а осмысленное соприкосновение. И подобно тому, как ладно расставлено все сущее, так и становящееся являет не простую последовательность, а некую восхитительную расположенность.
>
> *Марк Аврелий. Размышления*

Определение 1. *Последовательностью* называется произвольное отображение $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ множества натуральных чисел в множество действительных чисел. Числа $a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$ называются *членами* или *элементами* последовательности a и обозначаются $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, а сама последовательность обозначается через (a_n).

Строго говоря, сейчас мы определили *последовательности действительных чисел*. Можно рассматривать и последовательности элементов любого множества M, определяя их как отображения $a\colon \mathbb{N} \to M$.

Определение 2. Последовательность называется *возрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N}\quad a_{n+1} > a_n$. Последовательность называется *ограниченной сверху*, если $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\quad a_n < C$.

Задача 1. (а) Дайте определения убывающей, невозрастающей, неубывающей, ограниченной снизу последовательностей.

Определение 3. Последовательность называется *монотонной*, если она является либо возрастающей, либо убывающей, либо неубывающей, либо невозрастающей; последовательность называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу.

(б) Дайте определения немонотонной и неограниченной последовательности, не используя отрицания.

Задача 2. Докажите, что следующие последовательности ограничены:

(а) $a_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$, $|x| < 1$;

(б) $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{n}$;

(в) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$;

(г) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$;

(д) $a_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$;

(е) $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ двоек}}$;

(ж) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (*указание*: используйте бином Ньютона);

(з)* $a_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$.

Задача 3. Докажите, что следующие последовательности неограничены:

(а) $a_n = 1+x+x^2+\ldots+x^n$, $|x|>1$;

(б) $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ (гармонический ряд);

(в) $a_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots$;

(г)* $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$;

(д)* $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

Задача 4. Докажите, что следующие последовательности монотонны:

(а) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; (б) $a_n = \sqrt[n]{n}$, $n \geqslant 3$.

Определение 4. Пусть (n_i) — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $(\tilde{a}_i)$, где $\tilde{a}_i = a_{n_i}$, называется *подпоследовательностью* последовательности (a_n). Например, последовательность $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ является подпоследовательностью последовательности $1, 2, 3, 4, \ldots$, а последовательности $1, 1, 2, 3, \ldots$ и $3, 1, 5, 7, \ldots$ — нет.

Задача 5. (а) Докажите, что любая подпоследовательность ограниченной (монотонной) последовательности — ограниченна (монотонна).

(б) Придумайте две различные последовательности, являющиеся подпоследовательностями друг друга.

(в)* Придумайте такую последовательность натуральных чисел, чтобы любая последовательность натуральных чисел являлась ее подпоследовательностью.

Задача 6*. Докажите, что любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность.

Определение 5. Говорят, что число A является *предельной точкой* последовательности (a_n), если $\forall \varepsilon > 0$ множество $\{n \mid |a_n - A| < \varepsilon\}$ бесконечно. Кроме того, говорят, что $+\infty$ является предельной точкой последовательности (a_n), если $\forall C$ множество $\{n \mid a_n > C\}$ бесконечно.

Задача 7. (а) Дайте определение того, что $-\infty$ является предельной точкой последовательности.

(б) Придумайте последовательности, имеющие одну, две, бесконечное число предельных точек.

(в) Придумайте последовательность, для которой все действительные числа являются предельными точками.

Задача 8. Докажите, что

(а) монотонная последовательность не может иметь более одной предельной точки;

(б) последовательность ограничена тогда и только тогда, когда ни $+\infty$, ни $-\infty$ не являются ее предельными точками;

(в) любая предельная точка подпоследовательности является предельной точкой последовательности.

Задача 9. Найдите все предельные точки последовательностей:

(а) $a_n = (-1)^n$; (б) $a_n = \sin n^\circ$; (в)* $a_n = \sin n$;

(г) $a_n = \cos\frac{\pi n}{3} + \sin\frac{\pi n}{5} + \frac{1}{n}\cdot\cos\frac{\pi n}{7}\cdot\sin\frac{\pi n}{11}$.

Определение 6. Интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ называется *ε-окрестностью* точки x и обозначается через $U_\varepsilon(x)$.

Определение 7. Число A называется *пределом* последовательности (a_n), если для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого, попадают в $U_\varepsilon(A)$. Обозначается это так: $a_n \to A$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Вот несколько формулировок этого определения:

A) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \overset{\text{def}}{\iff} \forall U(A)\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \ a_n \in U(A)$;

B) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ d(a_n, A) < \varepsilon$, где $d(x, y)$ — расстояние между x и y;

C) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon$.

Последнюю формулировку нужно выучить наизусть.

Заметим, что вторая формулировка подходит и для последовательности, например, точек плоскости или вообще любого множества, где определено расстояние между точками («метрического пространства»), а первая формулировка (если ее правильно понимать) — для любого множества, где определено понятие окрестности («топологического пространства»).

Задача 10. (а) Сколько предельных точек у сходящейся последовательности? Верно ли, что, если у последовательности ровно одна предельная точка, то она сходящаяся?

(б) **(Единственность предела.)** Докажите, что $a_n \to A$ и $a_n \to B \Rightarrow \Rightarrow A = B$.

Задача 11. Найдите предел (a_n), где a_n имеет вид

(а) $\dfrac{57}{n}$; (б) $1+\dfrac{(-1)^n}{n}$; (в) $\dfrac{\sin n}{n}$; (г) $\cos n$;

(д) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$; (е) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

(ж) $\dfrac{1}{q^n}$ (вспомните и докажите неравенство Бернулли);

(з) $1+q+q^2+\ldots+q^n$; (и) $\dfrac{n^2+n+2}{n^2-3n+4}$.

Задача 12. Какие свойства получатся, если изменить определение предела следующим образом:

(а) $\exists N \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > N \ |a_n - A| < \varepsilon$ (кванторы *нельзя* менять местами);

(б) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \ \forall n > N \ |a_n - A| < \varepsilon$?

(в) Запишите через кванторы условие «(a_n) не является сходящейся последовательностью».

Ан-4. Предел
(10 декабря 2004 г.)

Задача 1. (а) Докажите, что сходящаяся последовательность ограничена. Обратное неверно.

(б) Пусть a_n сходится. Докажите, что среди значений a_n найдется наибольшее или наименьшее.

(в) Докажите, что если последовательность a_n сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0.$$

Верно ли обратное?

(г) Пусть $a_n \to 0$, (b_n) ограничена; докажите, что тогда $a_n b_n \to 0$.

Задача 2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что тогда

(а) $\forall c \in \mathbb{R} \ \lim\limits_{n\to\infty} c a_n = ca$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$;

(в) $\forall k \in \mathbb{N} \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = a^k$.

Задача 3 (арифметический корень). Докажите существование и единственность арифметического корня n-й степени ($n \in \mathbb{N}$) из любого неотрицательного числа. Проверьте, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и все $a_n \geqslant 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Определение 1. $a_n \to \infty$, если

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_n| > C.$$

NB: Такая последовательность *не* называется сходящейся.

Эта бесконечность (∞) соответствует северному полюсу окружности при стереографической проекции на прямую (см. рис. 1). Таким образом, $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = S^1$ (окружность).

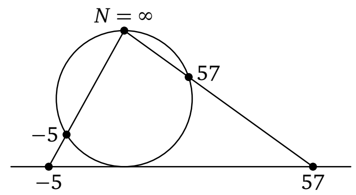

Рис. 1

Задача 4. (а) Докажите, что $a_n \to \infty \iff \dfrac{1}{a_n} \to 0$. (А если какие-то $a_n = 0$?)

(б) Дайте определения $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ и докажите аналог а).

(в) Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \big((\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty) \vee (\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty)\big)$?

Бесконечности $\pm\infty$ соответствуют точкам $\pm\pi/2$ отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ при компактификации $t \to \operatorname{arctg} t$ (см. рис. 2). Таким образом, $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} =$ отрезок.

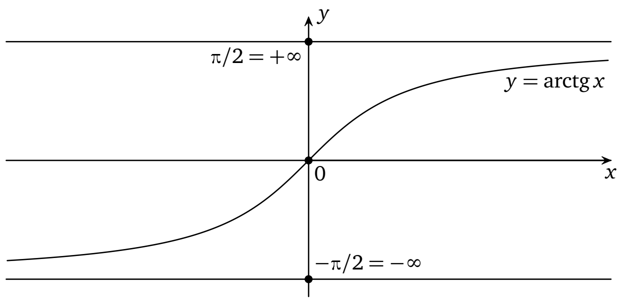

Рис. 2

Задача 5 (предел и арифметические операции).
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Докажите, что тогда существуют пределы:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$; (б) $\lim a_n b_n = ab$.

(в) Если к тому же $b \neq 0$ и[1] $\forall n\ b_n \neq 0$, то существует и предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Задача 6. Вычислите пределы:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ ($a = \mathrm{const}$); (б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}$; (в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{7n^2-2n-93}$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n}{2-3n}$; (д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4-4n^2+9}{6n^4-n^3-n^2-n-1}$;

(е) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n+4^n)/(5^n+6^n)$;

(ж)* $\lim\limits_{n\to\infty}(1^{57}+2^{57}+\ldots+n^{57})/n^{58}$ (на самом деле это $\int\limits_0^1 x^{57}\,dx$ — см. рис. 3);

(з)* $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin n$; (и) $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha$ ($\alpha = \mathrm{const}$); (к)* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$;

(л) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}$, где f и g — многочлены.

Задача 7. (а) Килограмм некоторого вещества распадается со скоростью 1 миллиграмм в минуту. Каков период его полураспада?

(б) Со стола высотой 1 метр скатился шарик. Сколько времени он будет прыгать, если при каждом отскоке он теряет 10 % своей энергии?

[1] В действительности следующее условие лишнее, так как $b \neq 0 \Rightarrow$ *почти все* (т. е. все, кроме конечного числа) элементы b_n отличны от нуля.

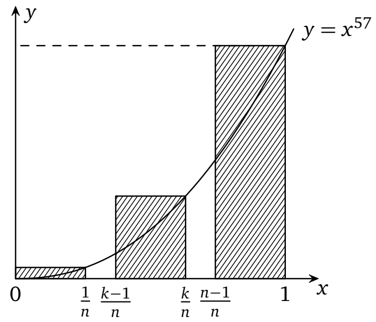

Рис. 3

Задача 8 (предельные точки и подпоследовательности).
(а) Докажите, что множество предельных точек последовательности совпадает с множеством пределов ее подпоследовательностей.

(б) Докажите, что последовательность сходится тогда и только тогда, когда сходится любая ее подпоследовательность.

(в)* Есть множество $\mathscr{M}$ последовательностей, каждая из которых стремится к A. Их объединили, не переставляя членов (т. е. сохранив порядок членов в каждой последовательности из множества). Сходится ли полученная последовательность, если множество $\mathscr{M}$ конечно?

(г)* Тот же вопрос, если множество $\mathscr{M}$ бесконечно.

Задача 9 (предельный переход в неравенствах). Пусть a_n и b_n — сходящиеся последовательности;

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Докажите, что тогда:

(а) если существует такой номер N, что $\forall n > N\ a_n \leqslant b_n$, то $A \leqslant B$;

(б) если $A < B$, то найдется такой номер N, что $\forall n > N\ a_n < b_n$.

(в) Останутся ли верными эти утверждения, если в а) заменить «$\leqslant$» на «$<$»; в б) заменить «$<$» на «$\leqslant$»?

(г) **(Лемма о двух милиционерах.)** Докажите, что если a_n и c_n сходятся к одному и тому же пределу A и при любом $n > N$ $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, то b_n сходится к тому же пределу A.

Задача 10*. (а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = A$. Верно ли обратное?

(б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для среднего геометрического.

(в) Если (существует) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\alpha$, то (существует) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\alpha$.

Задача 11. Вычислите пределы:
(а) $\lim\limits_{n\to\infty}((n+1)^{100}-n^{100})$; (б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n+1]{100}-\sqrt[100]{n})$;
(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+57}}{n+14}$; (г)* $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n)/\sqrt{n}$;
(д) $\lim\limits_{n\to\infty}1{,}00000001^n/n^{2004}$; (е) $\lim\limits_{n\to\infty}0{,}99999999^n\cdot n^{2004}$;
(ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2004}}{n!}$; (з)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$; (и)* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$; (к) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$;
(л)* $\lim\limits_{n\to\infty}\{(\sqrt{3}+1)^n\}$ ($\{\}$ — дробная часть);
(м)* $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty}\cos^m(2\pi x\cdot n!))$.

Задача 12*. (а) Докажите, что степени двойки чаще начинаются с семи, чем с восьми:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\text{количество чисел вида } 2^i\text{, начинающихся с 7, } i\leqslant n}{\text{количество чисел вида } 2^i\text{, начинающихся с 8, } i\leqslant n}>1.$$

По-другому: для случайного i число 2^i с большей вероятностью начинается с 7, чем с 8.

(б) Найдите первое число вида 2^i, начинающееся с 8; с 7. С любой ли цифры может начинаться степень двойки?

Пояснение. Начальный кусок последовательности 2^i не похож (см. (б)) на хвост (см. (а)) потому, что иррациональное число $\log_{10}2=0{,}3010\ldots$ очень похоже на рациональное $3/10$.

Ан-5. Полнота
(19 января 2005 г.)

Определение 1. Последовательность (a_n) называется фундаментальной, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\quad \forall n>N\quad \forall m>N\quad |a_n-a_m|<\varepsilon.$$

Задача 1. Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Несколько формулировок аксиомы полноты.

АП1. Любые два непустые подмножества $A,B\subset\mathbb{R}$, такие что $A\leqslant B$ (т. е. $\forall a\in A,\ b\in B\quad a\leqslant b$), разделяются некоторым числом $c\in\mathbb{R}$ (т. е. $\forall a\in A,\ b\in B\quad a\leqslant c\leqslant b$).

АП2. Любое непустое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.

АП3. (Принцип вложенных отрезков.) Для любой последовательности $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$ вложенных отрезков существует общая точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

АП4. (Аксиома Больцано—Вейерштрасса.) Любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

АП5. Любая монотонная ограниченная последовательность сходится.

АП6. (Критерий Коши.) Любая фундаментальная последовательность сходится.

Задача 2. Докажите, что имеют место следующие эквивалентности (при условии выполнения остальных аксиом действительных чисел):

$$\textbf{АП1}\Leftrightarrow\textbf{АП2}\Leftrightarrow\textbf{АП3}+\textbf{ПА}\Leftrightarrow\textbf{АП4}\Leftrightarrow\textbf{АП5}\Leftrightarrow\textbf{АП6}+\textbf{ПА}$$

(**ПА** — принцип Архимеда).

Задача 3. Проверьте, что

(а) в множестве $\mathbb{Q}$ из вышеприведенных аксиом выполняется только **ПА** (приведите контрпример к каждой аксиоме);

(б) в $\mathbb{R}$ **АП3** не выполняется, если заменить отрезки интервалами;

(в) общая точка последовательности вложенных отрезков единственна, если длины отрезков стремятся к нулю.

Задача 4*. Докажите, что если в списке аксиом из Ан-1 заменить **АП2** на **АП3** или **АП6**, то принцип Архимеда, вообще говоря, уже не будет верен.

Задача 5. Найдите пределы последовательностей, заданных рекуррентно:

(а) $a_{n+1}=\sqrt{p+a_n}$, $p\geqslant 0$, $a_1\geqslant -p$;

(б) $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{p}{2a_n}$, $p\geqslant 0$, $a_1\geqslant 0$;

(в) $a_{n+1}=\sin a_n$, a_1 — любое;

(г) $a_1=1$, $a_2=\frac{5}{2}$, $a_n=\frac{3}{2}a_{n-1}-\frac{1}{2}a_{n-2}$ при $n\geqslant 3$.

Задача 6 (десятичные дроби). Пусть даны целое неотрицательное число $m\in\mathbb{Z}$, $m\geqslant 0$, и последовательность (a_i), где $a_i\in\{0, 1, \ldots, 9\}$. Обозначим сумму $m+\frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}$ через $m, a_1\ldots a_n$.

(а) Докажите, что последовательность $b_n=m, a_1\ldots a_n$ — сходится. Ее предел обозначается через $m, a_1\ldots a_n\ldots$ Выражения вида $m, a_1\ldots a_n\ldots$ называются десятичными дробями.

(б) Введите отрицательные десятичные дроби. Как сравнивать десятичные дроби?

(в) Докажите, что десятичная дробь рациональна тогда и только тогда, когда она конечна или периодична (т. е. $\exists N, k\in\mathbb{N}\colon \forall n>N\ a_{n+k}=a_n$).

(г) Докажите, что любое число представимо в виде десятичной дроби. Единственно ли это представление?

Задача 7* (цепные дроби). Выражение вида $(*)$,

$$n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\ddots+\cfrac{1}{n_{k-1}+\cfrac{1}{n_k}}}} \qquad (*)$$

где $n_1\in\mathbb{Z}$, $n_2, \ldots, n_k\in\mathbb{N}$, называется (конечной) *цепной дробью*, а значение этого выражения обозначается через $[n_1; n_2, \ldots, n_k]$.

(а) Пусть $q_1, \ldots, q_k$ — частные, получающиеся при применении АЕ к паре (a, b). Докажите, что $[q_1; q_2, \ldots, q_k]=\frac{a}{b}$.

(б) Рассмотрим целое число m и произвольную последовательность натуральных чисел (a_i). Докажите, что последовательность

$$b_n=[m; a_1, \ldots, a_n]$$

сходится. (*Указание:* $b_{2n}<b_{2n+2}<b_{2n+3}<b_{2n+1}$.) Ее предел называется значением цепной дроби и обозначается через $[m; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$.

(в) Как сравнивать цепные дроби?

(г) Докажите, что значение цепной дроби рационально тогда и только тогда, когда эта дробь конечна.

(д)* Докажите, что цепная дробь периодична или конечна тогда и только тогда, когда ее значение равно $p+q\sqrt{d}$, где $p, q\in\mathbb{Q}$, $d\in\mathbb{N}$.

(е) Докажите, что любое число представимо в виде цепной дроби. Единственно ли это представление?

Задача 8 (число e). Докажите, что:

(а) последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится; ее предел обозначается через e;

(б) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\to e^2$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to$?

(в) $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$;

(г) $2<e<3$;

(д)* $e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=\frac{\theta_n}{n!\,n}$, где θ_n — некоторое число из интервала $(0, 1)$.

(е)* Вычислите число e с точностью до двух знаков после запятой.

(ж)* Докажите, что число e иррационально[1].

(з)* Разложите число e в цепную дробь.

Задача 9 (число π и длина окружности). Пусть P — множество периметров вписанных в данную окружность многоугольников, а Q — множество периметров описанных выпуклых многоугольников.

(а) Докажите, что существуют $\sup P$ и $\inf Q$.

(б) Докажите, что $\sup P=\inf Q$. Это число называется *длиной* (данной) *окружности*.

(в) Докажите, что отношение длины окружности к ее диаметру одно и то же для всех окружностей. Это число обозначается через π (оно, кстати, тоже трансцендентно).

(г) Докажите, что $3<\pi<4$.

(д) Пусть P_n — последовательность периметров выпуклых многоугольников, вписанных в окружность радиуса R (и содержащих центр данной окружности), d_n — длина наибольшей стороны соответствующего многоугольника. Докажите, что тогда, если $d_n\to 0$, то $P_n\to 2\pi R$.

Определение 2. *Длина дуги* окружности — это точная верхняя грань длин вписанных в нее несамопересекающихся ломаных (с концами в концах дуги). Обозначение: $|\Delta|$ — длина дуги Δ.

[1]Как и большинство действительных чисел, число e не только иррационально, но и *трансцендентно*, т. е. не является корнем никакого ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами.

Задача 10. (а) Пусть дуга Δ разбита (что это значит?) на дуги Δ_1 и Δ_2. Докажите, что тогда $|\Delta|=|\Delta_1|+|\Delta_2|$.

(б) Найдите длину дуги, ограниченной углом в $\alpha°$.

(в) Докажите, что при $x\in(0, \pi/2)$ выполнено неравенство $\sin x<x$.

Задача 11*. Вычислите предел

$$2^n\cdot\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{n\text{ корней}}$$

при $n\to\infty$.

Задача 12 (число π и площадь круга). Пусть S — множество площадей вписанных в данную окружность выпуклых многоугольников, а T — множество площадей описанных выпуклых многоугольников.

(а) Докажите, что существуют $\sup S$ и $\inf T$.

(б) Докажите, что $\sup S=\inf T$. Это число называется *площадью* (данного) *круга*.

(в) Пусть S_n — последовательность площадей правильных n-угольников, вписанных в окружность радиуса R. Докажите, что $S_n\to\sup S$.

(г) Докажите, что площадь круга радиуса R равна πR^2.

(д) Докажите, что при $x\in(0, \pi/2)$ выполнено неравенство $x<\operatorname{tg}x$.

Ан-6*. Хитрые пределы
(15 февраля 2005 г.)

Задача 1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$. Вычислите

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_ny_1+x_{n-1}y_2+\ldots+x_1y_n}{n}.$$

Задача 2. Пусть $0<a<b$. Зададим последовательности (a_n), (b_n) рекуррентно: $a_1=a$, $b_1=b$, $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$. Докажите, что последовательности (a_n) и (b_n) имеют общий предел.

Задача 3. Пусть последовательность (x_n) — ограничена.

(а) Докажите, что существуют l — наименьшая и L — наибольшая предельные точки.

(б) Докажите, что в условиях задачи (x_n) сходится тогда и только тогда, когда $l=L$.

(в) Докажите, что $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k>n}x_k$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k>n}x_k$.

(г) Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, то все числа из отрезка $[l, L]$ являются предельными точки (x_n).

Задача 4. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/2-x_{n+1})=0$. Докажите, что последовательность (x_n) сходится.

Задача 5. Дана такая последовательность (x_n), что

$$\forall n, m\quad 0\leqslant x_{n+m}\leqslant x_n+x_m.$$

Докажите, что последовательность (x_n/n) сходится.

Задача 6. Найдите пределы

(а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\bigl(2\pi\sqrt{n^2+n}\bigr)$; (б) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)$.

Задача 7. Пусть (x_n) — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}x=x$, расположенные в порядке возрастания. Найдите

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n).$$

Задача 8. $a_0=57$, $a_{n+1}=\operatorname{arctg}(a_n)$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$?

Задача 9. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Докажите, что найдется такая функция $g(x)$, что для любого натурального числа k и для любой последовательности $x_n \to \infty$ верно равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_k(x_n)}{g(x_n)} = 0.$$

Задача 10. Даны три числа: a_1, b_1, c_1. Последовательности a_i, b_i, c_i определяются так:

$$a_{n+1} = (b_n + c_n)/2, \quad b_{n+1} = (c_n + a_n)/2, \quad c_{n+1} = (a_n + b_n)/2.$$

(а) Найдите предел каждой из этих последовательностей.

(б) Рассмотрите случай m-угольника в n-мерном пространстве.

Задача 11. На гиперболе $xy = 1$ взяты точки

$$A_n\Big(x_n = \frac{n}{n+1}\Big) \quad \text{и} \quad B_n\Big(x_n = \frac{n+1}{n}\Big).$$

Пусть M_n — центр окружности, описанной вокруг A_n, B_n и начала координат. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$.

Задача 12. На стол кладутся спички так, что каждая следующая откладывается от конца предыдущей в направлении, перпендикулярном к линии, соединяющей общую точку с началом первой спички. Получается развертывающаяся спираль.

(а) Сделает ли она 2000 оборотов вокруг точки O?

(б) К чему стремится расстояние между соседними витками?

Ан-7. Предел функции. Конспект лекции и задачи

(1 апреля 2005 г.)

Обозначим через $D(f)$ область определения функции f $(D(f) \subset \mathbb{R})$, а через $\mathring{U}_\gamma(a)$ — *проколотую окрестность* точки a:

$$\mathring{U}_\gamma(a) = \{x \mid |x-a| < \gamma,\ x \neq a\} \quad (\gamma > 0).$$

Определение 1 (Коши). Пусть a — *предельная точка* множества $D(f)$, т. е. в любом интервале, содержащем точку a, содержится бесконечно много элементов $D(f)$. Отметим, что сама точка a при этом может не принадлежать $D(f)$.

Число A называется *пределом* $f(x)$ при $x \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D(f) \quad (0 < |x-a| < \delta) \ \Rightarrow\ (|f(x) - A| < \varepsilon).$$

Обозначение: $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пример 1. (а) $\lim\limits_{x\to 2} 2x = 4$.

(б) Не существует предела $\theta(x)$ при $x \to 0$, ($\theta(x)$ — функция Хевисайда).

(в) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$ (см. также лемму 1б)).

Задача 1. (а) Зачем нужны условия «$|x-a| > 0$» и «a — предельная точка $D(f)$»?

(б) Докажите, что определение предела можно переформулировать в терминах проколотых окрестностей:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \forall V_{\mathbb{R}}(A)\ \exists \mathring{U}_{D(f)}(a) : f(\mathring{U}_{D(f)}(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A).$$

Теорема 1 (единственность предела). *Пусть a — предельная точка $D(f)$. Тогда*

$$(\lim_{x\to a} f(x) = A) \wedge (\lim_{x\to a} f(x) = B) \ \Rightarrow\ A = B.$$

Доказательство. Аналогично доказательству единственности предела последовательности. □

Задача 2. (а) Дайте определение ограниченной (сверху, снизу и т. д.) функции, локально ограниченной (в окрестности некоторой точки) функции.

(б) Дайте определение проколотой окрестности бесконечности[1], сформулируйте соответствующие определения

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

и проверьте единственность предела в этом случае.

Лемма 1. (а) *Если функция имеет предел*[2] *в точке, то она ограничена в некоторой ее проколотой окрестности.*

(б) *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, *а функция* $g(x)$ *локально ограничена в проколотой окрестности точки* a *(причем* a *является предельной точкой множества* $D(f)\cap D(g)$*), то* $\lim f(x)\cdot g(x)=0$.

Доказательство. Очевидно. □

Теорема 2 (арифметические свойства предела). *Пусть* a *— предельная точка множества* $D(f)\cap D(g)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$. *Тогда*

(а) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=A+B$, $\lim\limits_{x\to a}(k\cdot f)(x)=k\cdot A$;

(б) $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)=A\cdot B$;

(в) *Если* $B\neq 0$, *то в достаточно маленькой проколотой окрестности числа* a *дробь* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *имеет смысл и* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

Обратите внимание, что в записи вида $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$ пределы слева и справа берутся по разным множествам.

Доказательство. (а) Так же, как для последовательностей.

(б) Сводится к лемме 1 и предыдущему пункту с помощью

$$\lim_{x\to a}(f(x)-A)\cdot g(x). \qquad \square$$

Задача 3. Докажите п. в) теоремы 2.

Задача 4. Найдите пределы функций:

(а) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\sin(2x)$; (б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sign}(x)$ («signum» — знак[3]);

(в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

Теорема 3 (предельный переход и неравенства).

(а) *Если*

$$\lim_{x\to a} f(x)>0 \ (\lim_{x\to a} f(x)<0),$$

[1]Никакой «∞» в $\mathbb{R}$, конечно, нет, но *проколотую* окрестность бесконечности мы определить можем.

[2]Конечный предел ($A\in\mathbb{R}$), других у нас пока нет.

[3]$\operatorname{sign}(x)=1$ при $x>0$, $\operatorname{sign}(x)=-1$ при $x<0$, $\operatorname{sign}(0)=0$.

то найдется такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a)$ *и число* $\varepsilon>0$, *что* $\forall x\in\mathring{U}(a)\cap D(f)$ *верно неравенство* $f(x)>\varepsilon$ $(f(x)<-\varepsilon)$ **(сохранение знака)**.

(б) *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, $A<B$, *то найдется такая проколотая окрестность* $\mathring{U}(a)$, *что* $\forall x\in\mathring{U}(a)\cap(D(f)\cap D(g))$ *верно неравенство* $f(x)<g(x)$.

(в) *Если* a *— предельная точка* $D(f)\cap D(g)$,

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \quad \lim_{x\to a} g(x)=B,$$

причем в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ *верно, что*

$$\forall x\in\mathring{U}(a)\cap(D(f)\cap D(g)) \quad f(x)\leqslant g(x),$$

то $A\leqslant B$.

Доказательство. Так же, как для последовательностей, соблюдая аккуратность с областями определения и т. п. □

Задача 5 (лемма о двух милиционерах). Сформулируйте и докажите лемму о двух милиционерах для функций.

Задача 6 (первый замечательный предел). Докажите, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Лемма 2 (предел по Гейне). *Если* a *— предельная точка* $D(f)$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *тогда и только тогда, когда для любой последовательности* (x_n), *где все* $x_n\in D(f)\setminus\{a\}$, *верно, что* $x_n\to a \Rightarrow f(x_n)\to A$.

Задача 7. Докажите лемму 2.

Задача 8 (число *e* как предел функции). Докажите, что

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Теорема 4 (предел монотонной функции). *Пусть* a *— предельная точка множества* $D(f)\cap(-\infty;a)$, *а функция* $f(x)$ *неубывает в некоторой проколотой левой полуокрестности точки* a. *Тогда предел функции* $f(x)$ *при* $x\to a-0$ *существует в том и только в том случае, когда функция* $f(x)$ *локально ограничена сверху в некоторой левой полуокрестности точки* a. *Аналогичное утверждение верно для локально невозрастающих функций.*

Доказательство. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sup\limits_{x\in\overset{\circ}{U}{}_\delta^-} f(x)$. $\square$

Задача 9. Дайте определение $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, сформулируйте и докажите утверждения вида $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

Задача 10. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где f и g — многочлены.

Задача 11. Вычислите пределы:
(а) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x}$; (б) $\lim\limits_{x\to 1} (\sqrt[3]{x}-1)/(\sqrt{x}-1)$; (в) $\lim\limits_{x\to 0} a^x$ ($a=\text{const}$);
(г) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha$ ($\alpha=\text{const}$); (д) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^k}$.

Определение 2. Пусть функция f ограничена на множестве M, $M\subset D(f)$. *Колебанием* функции f на множестве M называется число

$$\omega(f, M) = \sup_{x_1,x_2\in M} |f(x_1)-f(x_2)|.$$

Задача 12* (критерий Коши для функций). Пусть a — предельная точка $D(f)$. Функция f имеет предел при $x\to a$ тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon>0\ \exists\overset{\circ}{U}(a)\ \omega(f, (\overset{\circ}{U}(a)\cap D(f))) < \varepsilon$.

Геом-6. Топология прямой. Конспект лекции и задачи

(30 марта 2005 г.)

Определение 1. *Окрестностью* точки $x\in\mathbb{R}$ называется произвольный интервал, содержащий x.

Все вводимые далее понятия имеют смысл не только для прямой, но и для плоскости, пространства, их подмножеств и вообще произвольных множеств, в которых грамотно определены окрестности.

Определение 2. Точка $x\in\mathbb{R}$ по отношению к множеству $M\subset\mathbb{R}$ называется:

внутренней, если она содержится в M вместе с некоторой своей окрестностью;

предельной, если в любой ее окрестности есть точка из M, отличная от x;

граничной, если в любой ее окрестности есть точка из M и точка из дополнения $\mathbb{R}\setminus M$;

изолированной, если $x\in M$ и в некоторой окрестности x нет больше точек из M.

Множество всех внутренних точек множества M называется его *внутренностью* ($\operatorname{Int} M$), граничных — *границей* (∂M).

Задача 1. Найдите внутренние, предельные, граничные и изолированные точки множеств:

(а) $[0;1]$; (б) $\{(-2)/(2+n) : n\in\mathbb{N}\}$; (в) $\mathbb{Q}\cap(0;1)$.

Для каждого из этих множеств укажите границу и внутренность.

Определение 3. Множество $M\subset\mathbb{R}$ называется *открытым* (в $\mathbb{R}$), если оно вместе с каждой своей точкой содержит некоторую ее окрестность (т. е. $M=\operatorname{Int} M$). Множество $M\subset\mathbb{R}$ называется *замкнутым* (в $\mathbb{R}$), если оно является дополнением до открытого (т. е. $M=\mathbb{R}\setminus$ (открытое множество).

Пример 1. а) Интервал открыт, отрезок замкнут, точка замкнута, полуинтервал — никакой.

б) Вся прямая и пустое множество открыты и замкнуты одновременно.

Задача 2. Докажите, что

(а) объединение любого числа открытых множеств открыто;

(б) пересечение конечного числа открытых множеств открыто;

(в) пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто;

(г) объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

(д) Приведите контрпример, показывающий, что в утверждениях (а) и (в) нельзя поменять объединение и пересечение местами.

Вообще говоря, *топологией* на некотором множестве X называется набор его подмножеств, содержащий $\varnothing$ и X и удовлетворяющий условиям (а) и (б). Элементы этого набора называют *открытыми в* X множествами.

Лемма 1 (очевидная). *Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Если есть предельная точка снаружи, то дополнение не открыто.

$\Leftarrow$. Если какая-то точка из дополнения не содержится там со своей окрестностью, то она — предельная для исходного множества. $\square$

Определение 4. *Замыканием* множества M называется объединение M и множества его предельных точек (обозначается через $\overline{M}$).

Пример 2. (а) $\overline{[a,b]}=[a,b]$; (б) $\overline{(a,b)}=[a,b]$; (в) $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

Задача 3. Докажите, что (а) замыкание замкнуто; (б) M замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{M}=M$.

Задача 4. Докажите, что

(а) замыкание множества M — это наименьшее замкнутое множество, содержащее M;

(б) внутренность множества M — это наибольшее открытое множество, содержащееся в M.

Задача 5. Докажите, что

(а) $\overline{M}=M\cup\partial M$; (б) $\operatorname{Int}M=M\setminus\partial M$; (в) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}M)=\operatorname{Int}M$;

(г) $\mathbb{R}\setminus\overline{M}=\mathbb{R}\setminus\operatorname{Int}M$; (д) $\operatorname{Int}(\mathbb{R}\setminus M)=\mathbb{R}\setminus\overline{M}$.

Задача 6. Приведите пример множества M, для которого среди множеств M, $\overline{M}$, $\operatorname{Int}M$, $\operatorname{Int}\overline{M}$, $\overline{\operatorname{Int}M}$, $\operatorname{Int}(\overline{\operatorname{Int}M})$ есть ровно

(а) четыре; (б) пять; (в)* шесть различных.

Задача 7. Найдите все подмножества прямой, которые открыты и замкнуты одновременно.

Задача 8 (канторово множество). Выкинем из отрезка $[0,1]$ интервал $(1/3,2/3)$ (средняя треть), затем средние трети из оставшихся двух отрезков и т. д. Докажите, что

(а) сумма длин выброшенных интервалов равна 1;

(б) в *канторовом множестве* (это то, что осталось) кроме концов интервалов и точек 0 и 1 есть еще точки;

(в) канторово множество замкнуто, а замыкание его дополнения равно $\mathbb{R}$;

(г)* канторово множество несчетно.

Определение 5 (компакты). *Покрытием* множества M называется такой набор открытых множеств U_α, что $M\subset\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. Множество M называется *компактом* (точнее бикомпактом), если из каждого его покрытия можно выбрать конечное *подпокрытие* (т. е. оставить только конечное число из этих множеств так, чтобы они по-прежнему покрывали M).

Задача 9. Докажите, что (а) точка — компакт;

(б) две точки — компакт; (в) интервал — не компакт;

(г) прямая — тоже; (д) компакт замкнут;

(е) замкнутое подмножество компакта — компакт.

Лемма 2 (Гейне—Борель). *Отрезок — компакт.*

Доказательство. От противного, методом деления пополам. Возьмем плохое покрытие. Оно плохое хотя бы для одной половины отрезка. Возьмем эту половину и т. д. Полученная стягивающаяся последовательность вложенных отрезков имеет общую точку. Эта точка принадлежит хотя бы одному открытому множеству из покрытия, в котором будет целиком содержаться маленький отрезок из нашей последовательности. Противоречие. $\square$

Задача 10*. Докажите, что канторово множество — компакт.

Задача 11. Функция называется *локально ограниченной* на множестве M, если у каждой точки из M есть окрестность, в которой эта функция ограничена. Докажите, что

(а) функция, локально ограниченная на отрезке, ограничена на нем;

(б) функция, *локально знакопостоянная* (определите сами) на отрезке, знакопостоянна на нем.

(в) Докажите, что для интервала утверждение (а) неверно.

(г)* Верны ли утверждение (а) и (б) для канторова множества?

Задача 12* (компакты в $\mathbb{R}$). Докажите, что множество $M\subset\mathbb{R}$ является компактом тогда и только тогда, когда

(а) M — ограничено и замкнуто;

(б) любое бесконечное подмножество M имеет в M предельную точку.

Ан-8. Непрерывные функции. Конспект лекции и задачи
(6 апреля 2005 г.)

Функция f называется непрерывной (по Коши) в точке a, если она переводит близкие к a точки в близкие к $f(a)$.

Определение 1. Функция f называется *непрерывной в точке a* ($a \in D(f)$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad f(U_\delta(a) \cap D(f)) \subset U_\varepsilon(f(a)).$$

Функция f называется *непрерывной на множестве M* ($M \subset D(f)$), если она непрерывна во всех точках M. Множество непрерывных на M функций обозначается через $C(M)$.

Пример 1. (а) Функции $f(x)=57$; $f(x)=x$; $f(x)=1/x$ непрерывны везде, где определены.

(б) Функция Хевисайда непрерывна в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и разрывна в нуле.

Задача 1. В каких точках непрерывны, а в каких разрывны функции:

(а) (Дирихле) $\mathscr{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

(б) (Римана) $\mathscr{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{при } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \left(\frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь}\right), \\ 0, & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

(в) $f(x) = |x|$.

Задача 2. Докажите, что если в определении 1 заменить ε- и δ-окрестности просто на окрестности (см. Геом-6), то получится эквивалентное определение.

Лемма 1 (основное свойство непрерывных функций). *Для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ следующие свойства эквивалентны:*

(а) *f непрерывна на $\mathbb{R}$;*

(б) *прообраз любого открытого множества открыт;*

(в) *прообраз любого замкнутого множества замкнут.*

Доказательство. (а) $\Leftrightarrow$ (б) по определению 1, (б) $\Leftrightarrow$ (в) всегда. ☐

На самом деле лемма 1 верна и для функций на произвольном множестве M, если рассматривать *открытые в M* множества, т. е. пересечения открытых в $\mathbb{R}$ множеств с M. Соответствующая топология на M называется *индуцированной* из $\mathbb{R}$.

Предложение 1 (очевидное). *Если a — предельная точка $D(f)$, то f непрерывна в a тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Если a — изолированная точка $D(f)$, то функция f заведомо непрерывна в a.*

Задача 3. Докажите, что если функция f непрерывна в точке a, то

(а) она ограничена в некоторой окрестности точки a;

(б) если $f(a) \neq 0$, то функция f знакопостоянна в некоторой окрестности a.

Теорема 1. *Если функции f и g непрерывны в точке a, то и функции $f+g$, $f \cdot g$ непрерывны в a. Если к тому же $g(a) \neq 0$, то функция f/g определена в некоторой окрестности $U \cap D(f) \cap D(g)$ и непрерывна в a.*

Доказательство. Для предельных точек $D(f) \cap D(g)$ теорема 1 немедленно следует из теоремы 2 из Ан-7, для изолированных точек и доказывать нечего. ☐

Пример 2 (непрерывные функции).

а) Многочлен непрерывен на $\mathbb{R}$ (следует из примера 1 (а)) и теоремы 1.

б) Рациональная функция непрерывна везде, где определена (аналогично).

в) Функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны на $\mathbb{R}$, $\operatorname{tg}(x)$ и $\operatorname{ctg}(x)$ — везде, где определены.

(Например: $|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0|$.)

(в) Функция $\sqrt[n]{x}$ непрерывна везде, где определена.

Равенство $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ следует из аналогичного факта для последовательностей и определения предела по Гейне. При $a=0$ возможна односторонняя непрерывность — справа.

(г) Функция a^x непрерывна на $\mathbb{R}$.

При $a>0$: $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \Leftarrow \lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} = 1 \Leftarrow \lim\limits_{t\to 0} a^t = 1 \Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

Задача 4. Дайте определение непрерывности по Гейне.

Задача 5 (классификация разрывов). Пусть $a \in D(f)$, а функция f разрывна в a. В этом случае a называется *точкой разрыва* функции f.

(а) Сформулируйте условие «a — точка разрыва f» на языке кванторов, не употребляя отрицания.

Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то точка a называется *точкой устранимого разрыва* функции f (почему?).

(б) Приведите пример устранимого разрыва.

Если существуют пределы

$$f(a+0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{и} \quad f(a-0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to a-0} f(x)$$

и хотя бы один из них не совпадает с $f(a)$, то точка a называется *точкой разрыва первого рода* функции f.

(в) Приведите пример разрыва первого рода.

Если точка разрыва — не первого рода для f, то она называется *точкой разрыва второго рода* функции f.

(г) Приведите пример разрыва второго рода.

(д) Какого рода разрывы у функций Дирихле и Римана?

(е) Докажите, что монотонная функция может иметь разрывы только первого рода.

(ж)* Докажите, что множество точек разрыва первого рода не более чем счетно.

Предложение 2. *Если функция f непрерывна в точке a, а функция g — в точке $f(a)$, то композиция $(g\circ f(x)) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность $W(g(f(a))$ точки $g(f(a))$. Из непрерывности g найдется такая окрестность $V(f(a))$, что

$$g(V\cap D(g)) \subset W,$$

а из непрерывности f — такая окрестность $U(a)$, что

$$f(U\cap D(f)) \subset V.$$

Тогда $g(f(U)\cap D(f)) \subset W$. □

Пример 3. Функция $\operatorname{tg}(e^{\sin(x^2-5x)})$ непрерывна везде, где определена.

Топологические свойства

Задача 6*. Докажите, что при непрерывном отображении образ компакта — компакт.

Hint. Definition of a compact + Lemma 1.

Теорема 2 (Вейерштрасс). *Функция, непрерывная на компакте,*

(а) *ограничена на нем,*

(б) *принимает на нем максимальное и минимальное значение.*

Доказательство. (а) По задаче 3 у каждой точки компакта есть окрестность, в которой она ограничена. Эти окрестности задают покрытие компакта, которое имеет конечное подпокрытие. Осталось выбрать наибольшую (наименьшую) из верхних (нижних) граней для конечного числа окрестностей.

(б) $S := \sup\limits_{x \text{ из компакта}} f(x)$. Функция $g(x) = \dfrac{1}{S-f(x)}$ непрерывна и неограничена на компакте. □

Следствие. *Непрерывная на отрезке функция ограничена на нем и достигает на нем максимума и минимума.*

Задача 7*. Приведите различные контрпримеры к теореме 2, если

(а) f — разрывна,

(б) множество — не компакт.

Теорема 3 (Больцано—Коши). *Если $f\in C([a,b])$, причем $f(a)<0$, $f(b)>0$, то на отрезке $[a,b]$ найдется такая точка x, что $f(x)=0$.*

Доказательство. Запуская алгоритм деления пополам, получаем точку x. Так как отрезок замкнут, то $x\in[a,b]$. Так как функция непрерывна, то $f(x)\leqslant 0$ (левые края) и $f(x)\geqslant 0$ (правые края). □

Следствие (теорема о промежуточном значении). *Если*

$$f\in C([a,b]), \quad f(a)=A, \quad f(b)=B,$$

то функция f принимает все значения C между A и B.

Доказательство. Рассмотрите функцию $g(x)=f(x)-C$. □

Задача 8. (а) Докажите, что любой многочлен нечетной степени имеет корень.

(б) Докажите, что любое непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в себя имеет неподвижную точку (т. е. $f(x)=x$).

Это частный случай теоремы Брауэра о том, что любое непрерывное отображение круга, куба, шара, тетраэдра (со внутренностью)... в себя имеет неподвижную точку.

Задача 9* (про еду). (а) Докажите, что можно разрезать блин ножом на две равновеликие части.

(б) Докажите, что можно разрезать два лежащих на тарелке блина одним разрезом так, чтобы каждый был разделен на две равновеликие части.

(в) Докажите, что можно так разрезать ножом бутерброд, чтобы в обеих частях было поровну хлеба, масла и сыра.

Гурманы могут считать блин многоугольником, а бутерброд — многогранником, или заменить их на другие ограниченные фигуры, имеющие площадь/объем.

Задача 10*. Пусть $f\in C([0,1])$, $f(0)=f(1)$. (а) Докажите, что на графике $f(x)$ найдется горизонтальная хорда длины $1/2$.

(б) На что можно заменить $1/2$ в предыдущем утверждении?

Обратные функции

Лемма 2 (техническая). (а) *Непрерывная функция f инъективна (т. е. $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$) тогда и только тогда, когда f строго монотонна.*

(б) *Монотонная функция $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ тогда и только тогда непрерывна на отрезке $[a,b]$, когда множество ее значений есть отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство. (а) $\Leftarrow$. Очевидно. $\Rightarrow$. От противного по теореме о промежуточном значении.

(б) $\Rightarrow$. Следует из теоремы о промежуточном значении. $\Leftarrow$. От противного. По задаче 5 во множестве значений найдется дырка вида $(f(a-0), f(a))$ или аналогичного. $\square$

Задача 11 (контрпримеры). Покажите, что если в предыдущей лемме что-нибудь изменить или убрать, то все станет неверно.

Теорема 4 (об обратной функции). *Пусть $f\in C([a,b])$, f строго возрастает на $[a,b]$. Тогда определена обратная функция*

$$f^{-1}\colon [f(a), f(b)] \to [a,b],$$

которая строго возрастает и непрерывна на отрезке $[f(a), f(b)]$. Аналогичное верно и для строго убывающих функций.

Доказательство. Из леммы 2 (б) ($\Rightarrow$) следует, что множество значений f есть $[f(a), f(b)]$, а из леммы 2 (б) ($\Leftarrow$) следует непрерывность $f^{-1}(x)$. $\square$

Задача 12. Определите логарифм, корень, обратные тригонометрические функции и проверьте их непрерывность.

Ан-9. Производная. Конспект лекции и задачи
(13 апреля 2005 г.)

Определение 1. Будем говорить, что $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$, если в некоторой проколотой окрестности точки a имеет место равенство $f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

В частности, $f(x)=o(1)$ при $x\to a$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Пример 1 (зависимость от базы).
а) $x=o(1)$ при $x\to 0$; б) $x\neq o(1)$ при $x\to 57$;
в) $x^2=o(x)$ при $x\to 0$; г) $x=o(x^2)$ при $x\to\infty$;

Тем не менее, когда все o-малые рассматриваются при одной базе, уточнения вида $x\to a$ обычно опускаются.

Задача 1 (арифметика o-малых). Докажите, что
(а) $o(1)+o(1)=o(1)$; (б) $o(57f)=o(f)$;
(в) $o(1)-o(1)=o(1)$; (г) $o(1)\cdot o(1)=o(1)$;
(д) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$ при $x\to\infty$;
(е) если $h(x)$ локально ограничена в окрестности точки a, то при $x\to a$ верно, что

$$f(x)=o(g(x)) \Rightarrow f(x)\cdot h(x)=o(g(x)).$$

Пример 2. $\ln(1+x)=x+o(x)$ при $x\to 0$.
Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\Bigl(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\Bigr) = \ln(e) = 1,$$

q.e.d.

Задача 2 (второй замечательный предел). Докажите, что $e^x=1+{}$ $+x+o(x)$ при $x\to 0$.

Определение 2. Функция f называется *дифференцируемой в точке a* ($a\in D(f)$, a — предельная точка $D(f)$), если в некоторой окрестности точки a ее *приращение* $f(x)-f(a)$ может быть представлено в виде

$$f(x)-f(a) = A\cdot(x-a)+o(x-a),\ A\in\mathbb{R}. \qquad (*)$$

Число A называется *производной функции f в точке a* и обозначается через $f'(a)$ (а также через $\dfrac{df}{dx}(a)$ и $\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=a}$).

Задача 3. (а) Докажите, что в условиях определения 2 число A определено однозначно, причем $A = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

(б) Докажите, что функция f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Для большего разнообразия мы будем постоянно переходить с языка o-малых на язык пределов и обратно.

Пример 3. (а) $57' = 0$; (б) $x' = 1$;
(в) $(x^2)' = 2x$. Действительно,

$$(x+h)^2 - x^2 = (2x)h + h^2 = (2x)h + o(h).$$

(г) $\sin'(x) = \cos(x)$. Действительно,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)\cos(x+h/2)}{h} = \\ = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2}\cos(x+h/2) = \cos x.$$

(д) $\ln'(x) = 1/x$. Действительно, из примера 2 следует, что

$$\ln(x+h) - \ln(x) = \ln(1+h/x) = h/x + o(h/x) = (1/x)h + o(h).$$

Задача 4. (а) Сформулируйте и докажите: $(c\cdot f)'(a) = c\cdot f'(a)$.
(б) Вычислите производные косинуса и экспоненты.
(в) Вычислите производные функций $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ в точке 0, доопределив эти функции в нуле по непрерывности.
(г) Сформулируйте и докажите:

$$\left.\frac{df(ax+b)}{dx}\right|_{x=x_0} = a\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=ax_0+b}.$$

(д) Вычислите производные функций $\sin(5-7x)$, $\log_a(x)$, a^x.

Предложение 3. *Если функция дифференцируема в точке a, то она непрерывна в a.*

Доказательство. Очевидно следует из $(*)$. □

Задача 5. Докажите, что обратное утверждение неверно (приведите пример для случая, когда a — предельная точка $D(f)$).

Теорема 1 (арифметические свойства). *Если функции f и g дифференцируемы в точке a (a — предельная точка $D(f)\cap D(g)$), то и их сумма и произведение дифференцируемы в точке a, причем*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (fg)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a).$$

Если к тому же $g(a)\neq 0$, то и отношение $\dfrac{f}{g}$ дифференцируемо в a, причем

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Доказательство. Докажем утверждение про произведение.

$$(f\cdot g)(a+h) - (f\cdot g)(a) = f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) = \\ = (f(a)+f'(a)h+o(h))(g(a)+g'(a)h+o(h)) - f(a)g(a) = \\ = (f'(a)g(a)+f(a)g'(a))h + o(h)$$

(см. задачу 1). □

Задача 6. (а) Докажите остальные утверждения теоремы.
(б) Вычислите производную многочлена.
(в) Дифференцируема ли рациональная функция?
(г) Вычислите производные тангенса и котангенса.

Вычислите производные функций:
(д) $-3x^3 - \dfrac{2}{x+1}$; (е) $1{,}5e^{2x} - 2^{x-3}\sin x$; (ж) $\operatorname{tg}(\pi/4 - x) + \log_x(2)$.

Задача 7. Приведите пример определенной на $\mathbb{R}$ функции, такой что
(а) f' нигде не существует;
(б) f' существует ровно в одной точке;
(в) f' существует везде, но не везде непрерывна;
(г)* f' нигде не существует, но f всюду непрерывна.

Теорема 2 (производная сложной функции). *Если функция f дифференцируема в a, а функция g дифференцируема в $b = f(a)$, то композиция $g\circ f$ дифференцируема в a, причем $(g\circ f)'(a) = g'(b)\cdot f'(a)$.*

Доказательство.

$$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) = g(f(a+h)) - g(f(a)) = g(f(a)+t) - g(f(a)),$$

где $t = f(a+h) - f(a)$. Так как $t\to 0$ при $h\to 0$, то из дифференцируемости g в $b = f(a)$ следует, что

$$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) = g(b+t) - g(b) = g'(b)t + o(t).$$

Заметим, что $t = f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h)$, а $o(t) = o(h)$, откуда

$$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) = g'(b)f'(a)h + o(h),$$ □

Задача 8. Вычислите производные функций:
(а) x^α; (б) $\ln^2(\sqrt[3]{x}-1)$; (в) x^x; (г) $\log_x(x)$.

Теорема 3 (об обратной функции). *Пусть функции $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to X$ взаимно обратны (т. е. $g=f^{-1}$). Если функция f дифференцируема в точке a, причем $f'(a)\neq 0$, а функция g непрерывна в точке $b=f(a)$, то функция g также дифференцируема в точке $b=f(a)$, причем $g'(b)=1/f'(a)$.*

Доказательство. Аналогично задаче 2. □

Задача 9. (а) Проведите это доказательство.

(б) Зачем нужны условия «$f'(a)\neq 0$» и «g непрерывна в $b=f(a)$»?

(в) Вычислите производные обратных тригонометрических функций.

Теорема 4 (Ферма). *Если функция $f\colon U_\gamma(a)\to\mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, и f имеет в a локальный экстремум (максимум или минимум)*[1]*, то $f'(a)=0$.*

Доказательство. Если a — точка локального минимума, то

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\geqslant 0 \quad \text{при } h>0 \quad \text{и}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\leqslant 0 \quad \text{при } h<0. \qquad \square$$

Теорема Ферма дает необходимое условие экстремума во внутренней точке для дифференцируемой функции: $f'(a)=0$.

Следствие (теоремы о среднем). *Если функция $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то:*

(а) **(Ролль)** $f(a)=f(b)\ \Rightarrow\ \exists\xi\in(a,b)\ \ f'(\xi)=0$;

(б) **(Лагранж, теорема о конечном приращении)**

$$\exists\xi\in(a,b)\ f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a).$$

(в)* **(Коши)** *Пусть функции f и g отвечают условиям теоремы Лагранжа. Тогда на интервале (a,b) найдется такая точка ξ, что*

$$g'(\xi)(f(b)-f(a))=f'(\xi)(g(b)-g(a)).$$

Доказательство. (а) Непрерывная на отрезке функция f принимает наибольшее и наименьшее значения в точках $x_M, x_m\in[a,b]$. Если обе эти точки лежат на границе отрезка, то $f\equiv\mathrm{const}$; для внутренней точки $f'=0$ по теореме Ферма.

(б) Примените (а) к функции

$$F(x)=f(x)(b-a)-x(f(b)-f(a)).$$

[1] То есть в некоторой (быть может, меньшей) окрестности точки a верно, что $f(x)\leqslant f(a)$ ($f(x)\geqslant f(a)$).

(в)* Примените (а) к функции

$$F(x)=f(x)(g(b)-g(a))-g(x)(f(b)-f(a)). \qquad \square$$

Остальные утверждения в этом листке будут по большей части следствием теоремы Лагранжа.

Задача 10. (а) Нарисуйте картинки к теоремам Ролля и Лагранжа. Почему они называются «теоремами о среднем»?

(б) Докажите, что если $\forall x\in[a,b]\ f'(x)=0$, то $f=\mathrm{const}$ на $[a,b]$.

(в) Для каких множеств M верно, что ($f'\equiv 0$ на M) $\Rightarrow$ $f=\mathrm{const}$ на M?

(г) Докажите, что двигаясь по прямой со скоростью, не большей V, нельзя за время T уехать дальше, чем на VT.

(д)* Докажите, что двигаясь (на плоскости или в пространстве) со скоростью, не большей V, нельзя за время T уехать дальше, чем на VT.

(е)* Далеко ли можно добраться на автомобиле по прямой дороге, если через час надо вернуться, а ускорение машины не превосходит (по модулю) 10 м/с^2?

Теорема 5. *Если f — дифференцируема на (a,b), то*

(а) *f — не убывает (не возрастает) на (a,b) $\Rightarrow$ $f'|_{(a,b)}\geqslant 0$ ($\leqslant 0$);*

(б) *$f'|_{(a,b)}>0$ $\Rightarrow$ f (строго) возрастает на (a,b), $f'|_{(a,b)}\geqslant 0$ $\Rightarrow$ f не убывает на (a,b).*

Аналогично для $f'<0$ ($f'\leqslant 0$).

Доказательство. Немедленно следует из теоремы Лагранжа. □

Задача 11. (а) Приведите примеры, когда п. б) теоремы 5 нельзя усилить.

(б) Верно ли, что если $f'(a)>0$, то в некоторой окрестности точки a функция f возрастает?

(в) Докажите, что если $f'|_{(a,b)}>0$ и f непрерывна на *полуинтервале* $[a,b)$, то f (строго) возрастает на $[a,b)$.

(г) Докажите, что $e^x>1+x$ при $x\neq 0$.

(д)* Докажите, что $e^x>1+x^{57}/57!$ при $x>0$.

(е)* Докажите, что $2ab\ln(b/a)<b^2-a^2$ при $0<a<b$.

(ж) Сравните e^π и π^e;

(з) Сравните $1900^{5/7}+99^{5/7}$ и $1999^{5/7}$.

(и) Сравните $\cos(2005)$ и $1+\cos(2004)$.

Следующая теорема дает достаточное условие экстремума.

Теорема 6. *Пусть функция $f\colon U_\gamma(a)\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке a и дифференцируема в $\mathring{U}_\gamma(a)$. Тогда:*

(а) *$f'|_{U^+_\gamma(a)}>0$ и $f'|_{U^-_\gamma(a)}>0$ $\Rightarrow$ f не имеет экстремума в a;*

(б) *$f'|_{U^+_\gamma(a)}>0$ и $f'|_{U^-_\gamma(a)}<0$ $\Rightarrow$ f имеет (строгий) минимум в a;*

(а)′ $f'|_{U_\gamma^+(a)} < 0$ *и* $f'|_{U_\gamma^-(a)} < 0 \Rightarrow \ldots$

(б)′ $f'|_{U_\gamma^+(a)} < 0$ *и* $f'|_{U_\gamma^-(a)} > 0 \Rightarrow \ldots$

Доказательство. Следует из теоремы Лагранжа (см. 11 (в)). □

Следствие. *Если в условиях предыдущей теоремы функция f имеет в точке a также первую и вторую производную и $f'(a)=0$, то $f''(a)>0$ (<0) $\Rightarrow$ в точке a функция f имеет минимум (максимум). При $f''(a)=0$ ничего сказать нельзя.*

Задача 12. (а) Докажите это следствие.

(б)* Что можно сказать, если несколько первых производных равны нулю?

Одиннадцатый класс

Ан-10. Числовые ряды
(7 сентября 2005 г.)

Определение 1. Пусть (a_n) — последовательность чисел. Выражение (формальное) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется *рядом*, а число $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — n-й *частичной суммой* ряда. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда* $(S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n)$.

Задача 1. Докажите, что

(а) для любой последовательности (S_n) есть (и притом только один) ряд, такой что S_n — его частичные суммы;

(б) сходимость ряда (но, конечно, не его сумма) не изменится, если изменить конечное число членов ряда;

(в) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, обратное неверно.

Задача 2. Доказать сходимость и найти суммы рядов:

(а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{5^n} + \dfrac{1}{7^n}\right)$; (б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2000)}$; (в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Задача 3 (критерий Коши). Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall n > N\ \ \forall m \geqslant 0\ \ \left|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+m}\right| < \varepsilon$.

Задача 4. Сходятся ли (и при каких x) ряды:

(а) $\sum \dfrac{\sin(nx)}{2^n}$; (б) $\sum \sin(nx)$? (в)* Найдите сумму ряда а).

Задача 5 (неотрицательные ряды). Докажите, что если все члены ряда неотрицательны, то:

(а) сходимость $\Leftrightarrow$ все частичные суммы ограничены (одним и тем же числом);

(б) его сумма не зависит от порядка членов.

(в) **(Мажорантный признак сходимости.)** Если начиная с некоторого N $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, то $\sum b_n$ — сходится $\Rightarrow$ $\sum a_n$ — сходится ($\sum a_n$ — расходится $\Rightarrow$ $\sum b_n$ — расходится).

Определение 2. Ряд $\sum a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |a_n|$.

Задача 6. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится, обратное неверно.

Задача 7 (признаки сходимости). Докажите следующие признаки.

(а) **(Признак Лейбница.)** Если последовательность (a_n) монотонно убывает и $a_n \to 0$, то ряд $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ сходится; приведите пример, когда все $a_n > 0$, $a_n \to 0$, а ряд Лейбница расходится;

(б)* **(Признак Абеля.)** Если (a_n) монотонна и ограничена, а ряд $\sum b_n$ сходится, то ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

(в)* **(Признак Дирихле.)** Если (a_n) монотонна и $a_n \to 0$, а частичные суммы $\sum b_n$ ограничены, то ряд $\sum a_n b_n$ сходится.

Указание. Воспользуйтесь *преобразованием Абеля*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_{n+1} B_n - \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

Следующие два признака верны и в комплексных числах.

(г) **(Признак Коши.)** Если существует предел $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, то при $q < 1$ ряд $\sum a_n$ сходится (абсолютно), при $q > 1$ ряд $\sum a_n$ — расходится, при $q = 1$ ничего сказать нельзя.

(д) **(Признак Даламбера.)** Если существует предел $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, то...

Задача 8* (ζ-функция Римана).

(а) При каких действительных s сходится ряд $\zeta(s) = \sum \dfrac{1}{n^s}$?

(б) **(Эйлер.)** Докажите, что $\zeta(s) = \prod \left(1 - \dfrac{1}{p^s}\right)^{-1}$ (произведение по всем простым числам). (Это уже равенство числовых, а не формальных рядов!)

(в)* Докажите, что при $\operatorname{Re}(s) > 1$ этот ряд тоже сходится и что в данной области ζ-функция не имеет нулей. Кстати, известная *гипотеза Римана* утверждает, что все нетривиальные (а тривиальные — это какие?) нули ζ-функции (точнее аналитического продолжения суммы данного ряда) расположены на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.

Задача 9. Выяснить, сходятся ли (и при каких значениях параметров) ряды:

(а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$; (б) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$;

(в) $\sum \frac{1}{n}$, без слагаемых, содержащих цифру 7;

(г) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$;

(д) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+2000)}}$; (е) $\sum \dfrac{1}{1+a^n}$, $a > 0$; (ж) $\sum 5^n \sin \dfrac{1}{7^n}$;

(з) $\sum (-1)^n \dfrac{2+(-1)^n}{n}$; (и) $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

(к) $\sum n x^n$; (л) $\sum \dfrac{x^n}{n}$; (м)* $\sum n! x^n$; (н) ряды для e^x, $\sin x$, $\cos x$;

(о)* ряд для $\ln(1+x)$; (п)* $\sum \dfrac{n!}{n^n}$; (р)* $\sum \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(с)* $\sum \varphi_n x^n$ (φ_n — n-е число Фибоначчи); (т)* $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n}$.

Задача 10 (при перестановке слагаемых...). Докажите следующие утверждения.

(а) Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка его членов.

(б) **(Теорема Римана.)** Если ряд сходится неабсолютно (*условно*), то можно так переставить слагаемые, что ряд станет сходиться к произвольному числу; а можно переставить и так, чтобы ряд стал расходящимся.

(в)* В комплексной области множество сумм рядов, полученных из данного сходящегося ряда, есть либо точка (абсолютная сходимость), либо прямая (если...), либо вся комплексная плоскость. Привести соответствующие примеры.

Задача 11 (арифметические операции). Сформулируйте и докажите:

(а) сходящиеся ряды можно складывать, вычитать, умножать на число;

(б) абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать, при этом все равно как;

(в)* при перемножении сходящихся рядов может получиться расходящийся ряд. Приведите пример, когда произведение рядов зависит от способа их перемножения.

Задача 12* (суммы и произведения). Докажите, что если $0 < a_n < 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится тогда и только тогда, когда

(а) $\prod(1+a_n) = \infty$; (б) $\prod(1-a_n) = 0$.

Задача 13*. Вычислите бесконечные произведения:

(а) $\prod\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$; (б) $\prod\left(1 - \dfrac{2}{n^3+1}\right)$; (в) $\prod(1 + x^{2^n})$;

(г)* **(Виет)** $\prod\left(2\Big/\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\right)$; (д)* $\prod \cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$;

(е)* **(Эйлер)** $\prod\left(1 - \left(\dfrac{x}{\pi n}\right)^2\right)$.

Ан-11. Производная. Инфинитезимальные свойства
(1 октября 2005 г.)

Определение 1. Пусть U — открытое множество. Множество непрерывных на U функций обозначается $C(U)$. Обозначим через $C^{(n)}(U)$ множество функций, имеющих n непрерывных производных на U:

$$C^{(n)}(U) = \{f \in C(U) \colon \forall x \in U \ \exists f^{(n)}(x) \text{ и } f^{(n)} \in C(U)\}.$$

Про такие функции говорят, что они имеют гладкость порядка n. Функции класса $C^\infty(U)$ (см. задачу 1) называются бесконечно гладкими.

Задача 1. Что такое $C^\infty(U)$?

Задача 2. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ приведите пример функции, принадлежащей классу $C^{(n)}$, но не $C^{(n+1)}$.

Задача 3 (кратность корня). Пусть U — окрестность точки $a \in \mathbb{R}$ и $f \in C^\infty(U)$. Докажите, что:

(а) **(теорема Безу)**

$$f(a) = 0 \ \Rightarrow \ \exists \varphi(x) \in C^\infty(U) \colon f(x) = (x-a)\varphi(x)$$

(т. е. $f(x)$ делится на $(x-a)$);

(б) если $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, а $f^{(k)}(a) \neq 0$, то $k = \max\{n\colon f(x)$ делится на $(x-a)^n\}$. Число k называется *кратностью корня* a.

(в)* Может ли корень a иметь бесконечную кратность, если $f(x) \neq 0$ при $x \neq a$?

Задача 4 (многочлен Тейлора). Пусть f — бесконечно гладкая функция на прямой, $n \in \mathbb{N}$.

(а) Докажите, что существует единственный многочлен P степени, не превосходящей n, значение и первые n производных которого в нуле совпадают со значением и первыми n производными f в нуле. Найдите коэффициенты многочлена P.

(б) Докажите, что любой многочлен P степени n можно представить в виде

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где x_0 — произвольная точка прямой.

(в) Докажите, что существует единственный многочлен P степени, не превосходящей n, такой что функция $f(x) - P(x)$ имеет в x_0 корень кратности не ниже $n+1$. Найдите коэффициенты многочлена P.

(г) Верно ли, что если $\exists n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R} \ f^{(n)}(x) = 0$, то $f(x)$ — многочлен?

(д)* Верно ли, что если $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} \ f^{(n)}(x) = 0$, то $f(x)$ — многочлен?

Определение 2. Пусть U — окрестность точки $a \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что две функции $f, g \in C^{(n)}(U)$ эквивалентны в точке a, если они совпадают в некоторой окрестности этой точки. Класс эквивалентных в данной точке a функций называется *ростком* в точке a.

Локальные свойства функции — это те, которые верны для всего ростка.

Задача 5. Приведите пример

(а) двух различных дифференцируемых функций из одного ростка;

(б)* двух различных бесконечно гладких функций из одного ростка.

Задача 6. Определим сложение на ростках. Для двух данных ростков выберем по представителю $f(x)$ и $g(x)$ из каждого класса. Тогда суммой этих ростков назовем класс, содержащий функцию $(f+g)(x)$.

(а) Проверьте корректность данного определения и определите остальные операции над ростками.

(б) Определите дифференцирование на ростках.

Задача 7 (гомоморфизм Тейлора). Построим отображение из ростков бесконечно гладких функций в нуле в *формальные* ряды. Пусть f — функция из данного ростка. Сопоставим этому ростку ряд:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Проверьте, что это отображение

(а) корректно,

(б) сохраняет операции сложения, вычитания и произведения (т. е. является *гомоморфизмом*),

(в) уважает дифференцирование.

(г)* Приведите пример различных ростков, переходящих в один и тот же ряд. (Это означает, что наш гомоморфизм имеет ненулевое *ядро*.)

(д)* Докажите, что для каждого формального ряда найдется росток, переходящий в него. (А это означает, что наш гомоморфизм сюръективен, т. е. является *эпиморфизмом*.)

(е) Постройте аналогичный гомоморфизм из ростков бесконечно гладких функций в произвольной точке x_0 в формальные ряды и проверьте для него свойства (а)—(в).

Задача 8 (ряд Тейлора). Пусть U — окрестность точки $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \in C^\infty(U(a))$ (конечно, это слишком сильное условие).

(а) Сформулируйте и докажите, что

$$|f(x)| \leqslant M\frac{|x-a|^n}{n!},$$

где $M = \sup|f^{(n)}(x)|$.

(б) **(Форма Лагранжа остаточного члена.)** Докажите, что для любой точки $x \in U(a)$ найдется такая точка ξ, лежащая между a и x, что

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n.$$

(в)* Ослабьте условие бесконечной дифференцируемости в окрестности и уточните про «лежать между».

(г) **(Форма Пеано остаточного члена.)** Докажите, что если функция f имеет в точке a все производные до порядка n включительно, то имеет место следующее равенство:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

(Разложение функций в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано удобно при вычислении различных пределов.)

Задача 9. Разложите функции в ряд Тейлора в окрестности нуля и найдите область его сходимости:

(а) $\sin(x)$; (б) $\cos(x)$; (в) $\operatorname{tg}(x)$; (г) e^x;

(д) $\operatorname{arctg}(x)$; (е) $\ln(1+x)$; (ж) $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задача 10*. Представьте в виде суммы ряда с рациональными членами числа:

(а) π; (б) e; (в) $\ln 2$.

Оцените скорость сходимости в каждом случае.

Задача 11 (правило Лопиталя).

(а) Пусть $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b), причем $\forall x \in [a,b]$ $g'(x) \neq 0$. Тогда при $f(a) = g(a) = 0$ верно, что

$$\exists \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \exists \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

(б) Сформулируйте и докажите аналогичное правило для $f(a) = g(a) = \infty$.

Задача 12. Найдите пределы:

(а) $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; (б) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\frac{\sin x - 1/2}{\cos x - \sqrt{3}/2}$; (в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\exp(x)(x-1)^3}{\ln x \sin(\pi x)^2}$;

(г) $\lim\limits_{x\to 1/2+0}\operatorname{tg}(\pi x)\sqrt{x-1/2}$; (д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - \exp(-x^2/2)}{x^4}$;

(е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(x)\sin(x) - x(1+x)}{x^3}$; (ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[7]{x^7+x^5} - \sqrt[7]{x^7-x^5}\right)$;

(з) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$; (и) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{1+4x}-3}$;

(к) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - x^2\ln(1+1/x))$; (л) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (м) $\lim\limits_{x\to+0} x^x$;

(н)* (В. И. Арнольд) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arctg}(\arcsin x) - \arcsin(\operatorname{arctg} x)}$.

Ан-12. Интеграл Римана
(19 ноября 2005 г.)

Пусть f — функция, определенная на отрезке $[a,b]$. *Разбиением* $\mathbb{T}$ отрезка $[a,b]$ называется набор точек $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. *Диаметром* разбиения $\mathbb{T}$ называется число $\lambda(\mathbb{T})=\max\limits_{i=1,\ldots,n}\{x_i-x_{i-1}\}$. Пусть $\Xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ — произвольные точки, по одной из каждого отрезка данного разбиения. *Римановой суммой* называется сумма вида

$$S(f,\mathbb{T},\Xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

Определение 1. Функция f называется *интегрируемой* (по Риману) на отрезке $[a,b]$, если существует предел $S=\lim\limits_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}S(f,\mathbb{T},\Xi)$, т. е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\mathbb{T}\ \lambda(\mathbb{T})<\delta\ \Rightarrow\ \forall\ \Xi\quad|S(f,\mathbb{T},\Xi)-S|<\varepsilon$. Число S называется *интегралом* функции f по отрезку $[a,b]$ и обозначается через $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ или $\int\limits_{[a,b]}f(x)\,dx$. Множество функций, интегрируемых на отрезке $[a,b]$, будем обозначать $\mathscr{R}([a,b])$.

Задача 1. (а) Докажите, что интегрируемая на отрезке функция ограничена на нем.

(б) Приведите примеры интегрируемой и ограниченной неинтегрируемой функций.

(в) Докажите, что если функцию изменить в конечном числе точек, то ни ее интегрируемость, ни значение интеграла не изменятся.

Пусть $\mathbb{T}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Пусть

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),\qquad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x).$$

Суммы вида

$$S(f,\mathbb{T})=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})\quad\text{и}\quad s(f,\mathbb{T})=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$$

называются *верхней и нижней суммой Дарбу* соответственно.

Задача 2. (а) Докажите, что если разбиение $\mathbb{T}'$ получено из разбиения $\mathbb{T}$ добавлением точек, то $S(f,\mathbb{T})\geqslant S(f,\mathbb{T}')$, $s(f,\mathbb{T})\leqslant s(f,\mathbb{T}')$.

(б) Может ли при увеличении количества отрезков разбиения верхняя сумма Дарбу увеличиваться?

(в) Докажите, что для любых разбиений $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}'$ выполняется неравенство $S(f,\mathbb{T})\geqslant s(f,\mathbb{T}')$.

(г) Докажите, что $\inf\limits_{\mathbb{T}}S(f,\mathbb{T})\geqslant\sup\limits_{\mathbb{T}}s(f,\mathbb{T})$.

(д) Докажите, что ограниченная функция f интегрируема $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0}(S(f,\mathbb{T})-s(f,\mathbb{T}))=0.$$

Задача 3* (теорема Дарбу). Докажите, что для ограниченной функции f верно:

(а) f — интегрируема $\Rightarrow\inf\limits_{\mathbb{T}}S(f,\mathbb{T})=\sup\limits_{\mathbb{T}}s(f,\mathbb{T})=\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

(б) если $\sup\limits_{\mathbb{T}}s(f,\mathbb{T})=\inf\limits_{\mathbb{T}}S(f,\mathbb{T})$, то f интегрируема.

Задача 4. Докажите, что геометрическая фигура, ограниченная графиком интегрируемой неотрицательной функции и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ (т. е. фигура под графиком), имеет площадь. Чему равно ее значение?

Задача 5. Найдите (а) $\int\limits_0^1 x\,dx$;

(б) площадь под графиком кривой $y=x^2$ на отрезке $[0;1]$;

(в) $\int\limits_0^\pi\cos x\,dx$; (г) $\int\limits_0^\pi\sin x\,dx$.

Задача 6 (критерий Коши). (а) Сформулируйте и докажите критерий Коши существования интеграла.

(б) Докажите, что для ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции f условие[1]

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\mathbb{T}\ \lambda(\mathbb{T})<\delta\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_i,x_{i-1}])(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$$

влечет интегрируемость f на $[a,b]$.

(в) Верно ли обратное?

Задача 7 (признаки интегрируемости). Докажите, что ограниченная функция f интегрируема, если она

(а) равномерно непрерывна[2] на $[a;b]$;

---

[1]Колебанием ограниченной функции f на множестве M называется число

$$\omega(f,M)=\sup_{x,y\in M}|f(x)-f(y)|.$$

[2]То есть $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,x'\in[a,b]\quad|x-x'|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x)|<\varepsilon$.

(б) непрерывна (f — непрерывна на компакте $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна на нем);

(в) монотонна;

(г)* имеет конечное число точек разрыва;

(д)* имеет счетное число точек разрыва.

(е)* Приведите пример интегрируемой функции, имеющей несчетное множество точек разрыва.

Задача 8 (пространство интегрируемых функций). Докажите, что $\mathscr{R}([a,b])$ — это

(а) векторное пространство,

(б) $\mathbb{R}$-алгебра [1].

Hint. $fg = 1/4((f+g)^2-(f-g)^2)$, $h\in\mathscr{R} \Rightarrow h^2\in\mathscr{R}$.

(в) Докажите, что $f\in\mathscr{R}([a,b]) \Rightarrow |f|\in\mathscr{R}([a,b])$, верно ли обратное?

(г) Докажите, что пространство $\mathscr{R}([a,b])$ бесконечномерно.

Задача 9 (интеграл как линейный функционал).

(а) Докажите, что интеграл по отрезку $[a,b]$ является линейным функционалом на $\mathscr{R}([a,b])$.

(б) То же для функционала вида $f\mapsto \int_a^b f(x)g(x)\,dx$, где $g\in\mathscr{R}([a,b])$.

(в)* Приведите пример линейного функционала на $\mathscr{R}([a,b])$, не имеющего такого вида.

Задача 10 (интегрирование неравенств). Сформулируйте и докажите:

(а) $f(x)\leqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$;

(б) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

(в) **(Первая теорема о среднем.)** Если

$$f,g\in\mathscr{R}([a,b]),\quad m=\inf_{x\in[a,b]} f(x),\quad M=\sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

а функция g знакопостоянна на $[a,b]$, то при некотором $\mu\in[m,M]$ имеет место равенство:

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

[1]То есть элементы $\mathscr{R}([a,b])$ можно складывать, перемножать и умножать на вещественные числа.

(г) Если $f\in C[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$ на $[a,b]$ и $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, то $f(x)\equiv 0$ на $[a,b]$.

(д)* Постройте пример неотрицательной функции $f(x)$, интегрируемой на $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx=0$, которая отлична от нуля на более чем счетном подмножестве $[a,b]$.

Задача 11* (интеграл как непрерывный функционал).

(а) Докажите, что интеграл по отрезку $[a,b]$ является непрерывным линейным функционалом на $C([a,b])$ (относительно метрики равномерной сходимости) с нормой $|b-a|$.

(б) Докажите то же для функционала вида

$$f\mapsto\int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

где $g\in C([a,b])$, и вычислите его норму.

(в) Приведите пример непрерывного линейного функционала на $C([a,b])$, не имеющего такого вида, и вычислите его норму.

(г) Приведите пример линейного функционала, не являющегося непрерывным.

(д) Что можно сказать о непрерывности и норме функционала

$$f\mapsto\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

на $C([a,b])$ при $g\in\mathscr{R}([a,b])$?

Задача 12* (критерий Лебега). Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ ограничена на нем и множество точек ее разрыва имеет меру Лебега нуль. (Последнее означает, что это множество может быть покрыто счетным числом интервалов сколь угодно малой суммарной длины.)

Ан-13. Формула Ньютона—Лейбница. Неопределенный интеграл
(17 декабря 2005 г.)

Обозначим через $\mathscr{R}^{(1)}([a,b])$ множество дифференцируемых на отрезке функций с интегрируемой производной.

Задача 1. Докажите, что
(а) $f\in\mathscr{R}([a,b])$ и $[c,d]\subset[a,b]\ \Rightarrow\ f\in\mathscr{R}([c,d])$;
(б) $c\in[a,b]$, $f\in\mathscr{R}([a,c])$ и $f\in\mathscr{R}([c,b])\ \Rightarrow\ f\in\mathscr{R}([a,b])$ и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Задача 2. (а) **(Формула Ньютона-Лейбница.)** Если $F\in\mathscr{R}^{(1)}([a,b])$, то
$\int\limits_a^b F'(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b$, где $F(x)\Big|_a^b\overset{\text{def}}{=}F(b)-F(a)$.

Указание. Так как интегралы существуют, то можно выбирать $\mathbb{T}$ и Ξ самым удобным образом.

(б)* Верно ли, что если функция f дифференцируема на $[a,b]$, то $f\in\mathscr{R}^{(1)}([a,b])$?

Задача 3. Вычислите (а) $\int\limits_1^2\frac{1}{x^2}\,dx$; (б) $\int\limits_1^{57}\frac{1}{x+2}\,dx$; (в) $\int\limits_0^{\pi/4}\cos^2(x)\,dx$.

Итак, чтобы вычислить $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, достаточно найти такую функцию F, что $F'(x)=f(x)$.

Определение 1. Функция F называется *первообразной* функции f на множестве M, если $\forall x\in M\ F'(x)=f(x)$.

Задача 4 (сколько их?).
(а) Докажите, что если M — отрезок (интервал, луч), F_1 и F_2 — первообразные функции f на M, то $F_1-F_2\equiv C=\text{const}$.

(б) Найдите первообразные функции $f(x)=\frac{1}{x}$ на ее области определения.

(в)* Опишите пространство первообразных, если M состоит из n связных компонент. Какова его размерность?

(г) У любой ли интегрируемой на отрезке функции есть первообразная?

Определение 2. Множество всех первообразных функции f (на ее области определения) называют ее *неопределенным интегралом* и обозначают $\int f(x)\,dx$.

Задача 5. Найдите все первообразные
(а) многочлена; (б) x^α; (в) $f(ax+b)$, если $\int f(x)\,dx=F(x)+C$;
(г) a^x; (д) $\sin x,\ \cos x$; (е) $\operatorname{sh}x,\ \operatorname{ch}x$.

А для непрерывной функции первообразную мы построим явно.

Задача 6. Пусть f — интегрируема на $[a,b]$. Тогда можно определить функцию

$$\mathscr{F}(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b].$$

Докажите, что
(а) $\mathscr{F}(x)$ непрерывна на $[a,b]$;
(б) если f непрерывна в $x_0\in[a,b]$, то $\mathscr{F}$ дифференцируема в x_0, причем $\mathscr{F}'(x_0)=f(x_0)$ (т. е. $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt=f(x)$ в точках непрерывности f).

Как искать первообразные? Рассмотрим некоторые способы.

Задача 7 (интегрирование по частям).
(а) Если $f,g\in\mathscr{R}^{(1)}([a,b])$, то $\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx=fg\Big|_a^b-\int\limits_a^b g(x)f'(x)\,dx$.

(б) Сформулируйте и докажите аналогичную формулу для неопределенного интеграла.

Задача 8. Найдите
(а) $\int x^2\cos x\,dx$; (б) $\int\log_a x\,dx$; (в) $\int\arcsin x\,dx$, $\int\arccos x\,dx$;
(г) $\int\operatorname{arcsh}x\,dx$, $\int\operatorname{arcch}x\,dx$.

Задача 9 (замена переменных).
(а) Пусть $f\in C([a,b])$, $\varphi\in C^{(1)}([\alpha,\beta])$, $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Докажите, что тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

(б) Сформулируйте и докажите: $\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x)=F(\varphi(x))+C$.

Задача 10. Найдите
(а) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (б) $\int\operatorname{tg}x\,dx$, $\int\operatorname{th}x\,dx$;
(в) $\int\operatorname{arctg}x\,dx$, $\int\operatorname{arcth}x\,dx$; (г) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

(д) $\int \frac{dx}{1-x^2}$, $\int \frac{dx}{1+x^2}$; (е) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Задача 11*. (а) Вычислите $\int \sqrt{1\pm x^2}\,dx$.

(б) Найдите площадь внутренности эллипса $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$.

Задача 12*. Как искать $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены?

Ан-14. Calculations
(25 января 2006 г.)

Definition 1. The moment of inertia of a rigid body with respect to some axis is $I=\int r^2 dm$, where dm is the mass of an infinitesimal volume element, i. e. $dm=\rho dV$ for a body with constant density, r is the distance from that element to the axis. Here we'll be dealing with objects of constant density.

Problem 1. (a) Find the moment of inertia of a stick with respect to the axis going through the middle of the stick perpendicularly to its direction (the length of the stick is L and its mass is M).

(b) Calculate the moment of inertia of a solid disk, with respect to the axis going through the center of the disk perpendicularly to its plane (the disk has mass M and radius R).

(c) The same as in b), but now with respect to an axis passing through the center of the disk and laying in its plane. (*Hint:* Think of the disk as of a collection of bars with different lengths.)

(d) Repeat b) and c) for a ring of radius R and mass M.

(e) **(Pythagorean theorem)** Prove that for any solid body in the xy-plane $I_z=I_x+I_y$. (I_k is the mom. of inertia with respect to k-axis)

Problem 2. Now that you feel yourself comfortable with the moments of inertia, try to calculate the moments of inertia of:

(a) a hollow sphere (with respect to the axis going through the center of the sphere); (b) a solid sphere. (*Hint:* think of a solid sphere as of a collection of hollow spheres.)

Definition 2. The position of the center of mass for a given rigid body is given by

$$\vec{R}=\left(\int dm\vec{r}\right)\Big/\left(\int dm\right).$$

Problem 3. (a) Find the center of mass for a semi-circle of radius R with uniform constant density.

(b) The same for a half-disk of radius R with uniform constant density.

Problem 4. (a) Find the center of mass for a hemisphere of radius R with uniform constant density.

(b)* Ibid for a half of an ellipsoid with semi-axis a, b and b, cut in half along the a-axis.

Problem 5*. In the 10th grade you learned in your physics course that the oscillation period of a pendulum is $T=2\pi\sqrt{(l/g)}$. Now let's find a correction to this formula: using conservation of energy one writes

$$(1/2)l(\dot{\varphi})^2 = g(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

where φ_0 is the angle of maximum deflection for the pendulum and $\dot{\varphi} = = d\varphi/dt$. Integrating we get the following formula for the period:

$$T = 4\sqrt{(l/2g)}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}.$$

Expanding $\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2 + \varphi^4/24$ (same for φ_0), expanding the inverse square root in the integrand around $\varphi_0^2 - \varphi^2$ to the next-to-lowest order, and integrating over φ find the correction to the period.

Hint. you may find the substitution $\varphi = \varphi_0 \sin\xi$ useful to do the integral.

Problem 6 (is there any life on Mars?). A spaceship approached Mars and hung over it, being motionless with respect to the planet's axis. At this very moment a famous scientist James J. Jones saw little green humanoids on Mars surface. He was dumb-founded: he absent-mindedly opened the hatch and fell out of the spaceship. When would Dr. Jones fall on the innocent creatures[1]? The radius of Mars is R, the radius of a ship orbit "— R'. The mass of planet Mars is M. Estimate this time.

Hint. Use conservation of energy to construct differential equation

$$(1/2)(dr/dt)^2 = GM(1/r - 1/R')$$

which you can turn into an integral. The potential energy of some mass m in gravitational field of mass M is $U = -G\frac{mM}{r}$, where r is the distance between the centers of the two masses and G is Newton's constant.

Problem 7. An ideal gas is adiabatically compressed (expanded) from some volume V_1 to V_2. Find the work done by the gas, if γ, P_1, V_1, V_2 are known.

Problem 8. The number of gas molecules having velocity in the interval $(v, v + dv)$ is

$$dN = Cv^2 e^{-mv^2/2kT}\, dv,$$

where m is the mass of a molecule, T is the temperature, k is the Boltzmann constant, C is some constant irrelevant to the problem. Find the average[2]

[1] Truly speaking, they may be not the same he saw.

[2] A mean value of variable ξ is, by definition, $\langle\xi\rangle = \frac{\sum \xi(t_i)\rho(t_i)(\Delta t)_i}{\sum \rho(t_i)(\Delta t)_i}$, where ρ is a density of ξ.

square of the velocity of a molecule in gas $\langle v^2\rangle$. Compare it to the most probable speed obtained from $\frac{d}{dv}\left(\frac{dN}{dv}\right) = 0$.

Problem 9. Find the electric field along the axis of a uniformly charged ring. The ring has charge Q and radius R.

Problem 10. Find the electric field along the axis of a uniformly charged disk. The disk has charge Q and radius R.

Problem 11 (hydrogen Atom). Let us find the ground state energy of an electron inside the hydrogen atom. Probability to find a ground state electron inside the atom is $p(r) = |\Psi(r)|^2 = (1/(\pi a^3))e^{-2r/a}$, where r is the distance between the nucleus and the electron and $a \approx 5 \times 10^{-11}$ m is the Bohr radius. (By the way, do you know what Ψ is?) The potential energy of the electron in the electric field of the nucleus is $U(r) = -e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$, where e is the magnitude of the electron's (or proton's) electric charge, ϵ_0 is a constant that you might have seen in your Physics class. To find the ground state energy we need to integrate $p(r)U(r)/2$ over the whole space (1/2 is due to virial theorem, which you do not know yet, but trust me on this one). The final result for the ground state energy is

$$E_1 = \int_0^\infty 4\pi r^2 \frac{1}{2} p(r)U(r)\, dr.$$

Find this ground state energy by direct integration.

Problem 12*. For a comet moving in the gravitational field of the sun the solution of the equations of motion yields:

$$t = \int_{\rho_{\min}}^{\rho} \frac{dr}{\sqrt{(2/m)(E - U(r)) - (L^2/(m^2r^2))}};$$

$$\varphi = \int_{\rho_{\min}}^{\rho} \frac{(L/r^2)dr}{\sqrt{(2m)(E - U(r)) - (L^2/r^2)}},$$

where E is the energy of the comet, m is its mass, t is the time, (ρ, φ) are the polar coordinates, $U(r)$ is the potential energy, L is some constant (angular momentum). For a comet with $E = 0$ coming to Sun from infinity, show that the trajectory is a parabola. The potential energy is $U(r) = -\frac{GM}{r}$, G is the gravitation (Newton's) constant, M is the mass of the Sun.

When $E = 0$: $\rho_{\min} = \frac{L^2}{2mMG}$.

Вопросы к экзамену по математическому анализу
(январь 2006)

1. Аксиоматическое введение действительных чисел. АП1 и АП2. Натуральные числа и принцип математической индукции. Принцип Архимеда.

2. Предел и предельные точки последовательности. Предельный переход и арифметические операции.

3. Последовательности. Предельный переход и неравенства. Лемма о двух милиционерах для последовательностей.

4. Последовательности. Аксиомы полноты АП4, АП5, АП6.

5. Представление действительных чисел десятичными дробями.

6. Представление действительных чисел цепными дробями.

7. Аксиома полноты и принцип вложенных отрезков (АП3). Лемма Гейне—Бореля (отрезок — компакт).

8. Число e как предел и как сумма ряда. Число e с точностью до 0,01. Иррациональность числа e.

9. Длина окружности и число π. $3<\pi<4$.

10. Длина дуги и тригонометрические функции числового аргумента.

11. Сходимость геометрической прогрессии. Признаки Коши и Даламбера сходимости ряда.

12. Критерий Коши сходимости ряда. Сходимость и абсолютная сходимость. Теорема Римана (для $\mathbb{R}$).

13. Предел функции по Коши и по Гейне. Арифметические свойства предела. Предельный переход в неравенствах. Односторонний предел, теорема о пределе монотонной функции.

14. Предельный переход в неравенствах. Лемма о двух милиционерах для функций. Первый замечательный предел. Число e как предел функции.

15. Непрерывные функции, локальные свойства. Арифметические свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной функции.

16. Непрерывность элементарных функций (многочлены, тригонометрические и показательная функции).

17. Топология в $\mathbb{R}$. Компакты в $\mathbb{R}$, критерий компактности.

18. Непрерывные на $\mathbb{R}$ функции, критерий непрерывности. Непрерывный образ компакта — компакт.

19. Свойства непрерывных на компакте функций. Следствия для отрезка.

20. Теорема о промежуточном значении для непрерывных функций. Непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

21. Классификация разрывов. Разрывы монотонной функции, критерий непрерывности. Теорема об обратной функции (непрерывный случай). Логарифмическая и обратные тригонометрические функции, их непрерывность.

22. Производная. Формула $f(x+h)=f(x)+Ah+o(h)$. Непрерывность дифференцируемой функции. Производная суммы, разности, произведения, частного. Производные многочленов, тригонометрических функций.

23. Второй замечательный предел. Производные показательной, логарифмической, степенной функции.

24. Производная сложной функции. Теорема об обратной функции (дифференцируемый случай).

25. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа. Необходимое условие экстремума.

26. Производная и неравенства. Достаточные условия экстремума.

27. Разложение в ряд Тейлора. Остаточный член в форме Лагранжа.

28. Правило Лопиталя.

Геом-7*. Выпуклость
(8 февраля 2006 г.)

Определение 1. Геометрическая фигура[1] называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок.

Задача 1. Верно ли, что
(а) объединение, (б) пересечение, (в) разность,
(г) симметрическая разность, (д) проекция выпуклых множеств — выпуклое множество?

Задача 2. Планета имеет форму выпуклого многогранника, причем в его вершинах расположены города, а по его ребрам идут дороги. Две дороги закрыты на ремонт. Докажите, что из любого города можно проехать в другой по оставшимся дорогам.

Задача 3 (теорема Хелли).
(а) На плоскости даны 4 выпуклые фигуры, причем любые три из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все они имеют общую точку.
(б) На плоскости даны n выпуклых фигур, причем любые три из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все они имеют общую точку.
(в) На плоскости даны n точек, причем любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что тогда и все n точек можно накрыть кругом радиуса 1.
(г)* Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для $\mathbb{R}^n$.
(д)* **(Теорема Юнга.)** Если X — конечное подмножество $\mathbb{R}^n$, причем диаметр X не превосходит 2, то существует замкнутый шар радиуса $\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$, покрывающий X.

Пусть I — промежуток.

Определение 2. Функция $f: I \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз*, если множество точек, лежащих над ее графиком, выпукло.

Определение 3. Функция $f: I \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз*, если

$$\forall x_1, x_2 \in I \ \forall \alpha \in [0; 1] \ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

(Нарисуйте картинку!)

Задача 4. (а) Докажите, что определения 2 и 3 эквивалентны.

[1] То есть подмножество точек плоскости, прямой или пространства.

(б) Дайте определения выпуклой вверх функции.

Задача 5. (а) Докажите, что $a+b>2 \Rightarrow a^{512}+b^{512}>2$;
(б) докажите, что $a+b>2 \Rightarrow a^{57}+b^{57}>2$.

Задача 6. (а) Докажите, что выпуклая на интервале (a, b) функция непрерывна на нем.
(б) Верно ли это для отрезка $[a, b]$?
(в) Верно ли, что выпуклая на (a, b) функция дифференцируема?
(г) Докажите, что если f выпукла на всей числовой оси и ограничена, то она постоянная.

Задача 7. (а) Докажите, что если функция $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ выпукла вниз, то при всех $x \in (a, b)$ существуют правая и левая производные:

$$f'_{\pm}(x) = \lim_{h\to\pm 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

(б) при этом $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.
(в) Докажите, что при $x<y$ $f'_+(x) \leqslant f'_-(y)$.
(г) Докажите, что выпуклая на интервале функция дифференцируема на нем всюду, кроме, быть может, счетного числа точек.

Задача 8. Докажите, что если $f \in C^{(1)}((a, b))$, то f выпукла вниз $\Leftrightarrow$ график f лежит в верхней полуплоскости относительно любой своей касательной.

Задача 9 (критерии выпуклости).
(а) Для того, чтобы дифференцируемая на (a, b) функция f была выпуклой вниз на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная f' возрастала (возможно, нестрого);
(б) если у f есть на (a, b) также и вторая производная, то выпуклость вниз $\Leftrightarrow$ $f'' \geqslant 0$ на (a, b).

Задача 10 (неравенство Йенсена). Если функция $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ выпукла вниз, $t_1, \ldots, t_n \in (a, b)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, то

$$f(\alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_n t_n) \leqslant \alpha_1 f(t_1) + \ldots + \alpha_n f(t_n).$$

Задача 11. (а) **(Неравенство Коши.)** При $x_1, \ldots, x_n > 0$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant (x_1 + \ldots + x_n)/n.$$

(б) **(Неравенство Коши—Буняковского.)**

$$x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \leqslant \sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2)}.$$

Hint. Возьмите $f(t) = t^2$.

(в) **(Неравенство Гёльдера.)** При $p,q>0$, $1/p+1/q=1$, $x_i,\ y_i\geqslant 0$
$$x_1y_1+\ldots+x_ny_n\leqslant(x_1^p+\ldots+x_n^p)^{1/p}(y_1^q+\ldots+y_n^q)^{1/q}$$
(при $p=q=2$ это — ...).

(г) **(Неравенство Минковского.)** При $p>1$, $x_i,y_i\geqslant 0$
$$((x_1+y_1)^p+\ldots+(x_n+y_n)^p)^{1/p}\leqslant(x_1^p+\ldots+x_n^p)^{1/p}+(y_1^p+\ldots+y_n^p)^{1/p}$$
(при $p=2$ это — неравенство треугольника в $\mathbb{R}^n$, и следует из пункта (б)).

Задача 12 (неравенства о средних). Пусть
$$S_\alpha(x_1,\ldots,x_n)=\left(\frac{x_1^\alpha+\ldots+x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$
— среднее степенное положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$ порядка α, $\alpha\neq 0$. Докажите, что:

(а) $S_\alpha(x_1,\ldots,x_n)\leqslant S_\beta(x_1,\ldots,x_n)$ при $\alpha<\beta$;

(б) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}S_\alpha(x_1,\ldots,x_n)=\max\limits_{i=1,\ldots,n}x_i$; $\quad\lim\limits_{\alpha\to-\infty}S_\alpha(x_1,\ldots,x_n)=\min\limits_{i=1,\ldots,n}x_i$.

(в) Найдите $\lim\limits_{\alpha\to0}S_\alpha(x_1,\ldots,x_n)$.

Геом-8*. Геометрия кривых
(4 марта 2006 г.)

Для указания координат *вектора* в геометрии используются только *верхние* индексы, нижние индексы используются для *ковекторов*, которые живут по другим законам.

Определение 1. Хорошей[1] *параметризованной кривой* в $\mathbb{R}^n$ называется такое отображение
$$\boldsymbol{\gamma}\colon I=[a,b]\to\mathbb{R}^n;\quad t\mapsto\boldsymbol{\gamma}(t)=(\gamma^1(t),\gamma^2(t),\ldots,\gamma^n(t)),$$
что все функции $\gamma^i(t)$ — хорошие. Определения замкнутой, несамопересекающейся кривой и т. п. самоочевидны.

Носителем кривой называется множество $\Gamma=\boldsymbol{\gamma}(I)\subset\mathbb{R}^n$.

Задача 1. Может ли носитель C^∞-гладкой кривой на плоскости совпадать с графиком функции $y=|x|$ на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$?

По одному и тому же пути можно пройти за разное время. Введем

Определение 2. Две хорошие параметризованные кривые
$$\boldsymbol{\gamma}_1\colon I_1=[a,b]\to\mathbb{R}^n\quad\text{и}\quad\boldsymbol{\gamma}_2\colon I_2=[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$$
называются *эквивалентными*, если найдется такая хорошая строго монотонная функция $\psi\colon[\alpha,\beta]\to[a,b]$, что $\forall\tau\in[\alpha,\beta]$ $\boldsymbol{\gamma}_1(\psi(\tau))=\boldsymbol{\gamma}_2(\tau)$ и обратная функция к ψ тоже хорошая. Множество $[\boldsymbol{\gamma}]$ всех параметризованных кривых, эквивалентных данной, называется *кривой*, а выбор элемента из $[\boldsymbol{\gamma}]$ — параметризацией данной кривой.

Задача 2. Носители эквивалентных кривых, очевидно, совпадают. Верно ли обратное?

Определение 3. *Касательным вектором* к параметризованной кривой $\boldsymbol{\gamma}$ в точке t (скоростью) называется вектор
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)=(\dot\gamma^1(t),\dot\gamma^2(t),\ldots,\dot\gamma^n(t)).$$

Определение 4. Длиной хорошей кривой $[\boldsymbol{\gamma}]$ называется
$$\int_a^b|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)|\,dt=\int_a^b\sqrt{(\dot\gamma^1(t))^2+(\dot\gamma^2(t))^2+\ldots+(\dot\gamma^n(t))^2}\,dt.$$

Задача 3. (а) Проверьте корректность этого определения.

(б) Докажите, что длина хорошей кривой равна пределу длин вписанных ломаных.

[1]То есть непрерывной, 57 раз непрерывно дифференцируемой, и т. п.

Плоские кривые

Задача 4. Как выглядит формула длины
(а) для кривой — графика функции: $y=f(x)$;
(б) для кривой, заданной в полярных координатах: $\rho=\rho(\varphi)$?

Задача 5. Найдите длину дуги[1]
(а) **(параболы)** $x^2=2py$ (p — расстояние от фокуса до директрисы);
(б) **(полукубической параболы)** $x^3=y^2$;
(в) **(циклоиды)** кривой, которую описывает точка колеса, катящегося по прямой (одной арки);
(г) **(астроиды)** $x^{2/3}+y^{2/3}=1$;
(д) **(спирали Архимеда)** $\rho=a\varphi$ при $\varphi\in[0,2\pi]$;
(е) **(кардиоиды)** $\rho=1+\cos\varphi$ (а почему она так называется?);
(ж) кривой $\varphi=(\rho+1/\rho)/2$ при $\rho\in[1,3]$.
К каждой задаче надо нарисовать картинку!

Задача 6 (эллиптический интеграл). Докажите, что длина границы эллипса с полуосями a и b равна длине одной волны синусоиды $y=c\sin(x/b)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Чтобы изучить локальное поведение кривой, нам понадобится особая техника. Пусть $(\cdot,\cdot)$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Задача 7. Докажите, что
(а) **(правило Лейбница)**

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1(t),\gamma_2(t))=(\dot\gamma_1(t),\gamma_2(t))+(\gamma_1(t),\dot\gamma_2(t));$$

(б) $|\gamma(t)|\equiv\mathrm{const}\Rightarrow\forall t\ \ \dot\gamma(t)\perp\gamma(t)$, нарисуйте носитель и скорость в этом случае;
(в) если скорость постоянна по модулю, то ускорение перпендикулярно скорости.

Как вы уже поняли из задачи 1, даже для C^∞-гладкой кривой носитель может быть «негладким». Правильное условие такое:

Определение 5. Кривая $[\gamma]$ называется *регулярной*, если она
(а) хорошая, (б) $\forall t\ |\dot\gamma(t)|\neq0$.

Задача 8 (натуральный параметр). Для любой регулярной кривой γ есть одна замечательная параметризация $s(t)=\int\limits_0^t|\dot\gamma(t)|\,dt$.

[1]То есть куска кривой от точки с абсциссой x_0 до точки с абсциссой x_1.

Проверьте, что
(а) γ можно рассматривать как функцию от s,
(б) $\left|\frac{d\gamma}{ds}\right|\equiv1$, т. е. мы движемся с постоянной (по модулю) скоростью и с ускорением, направленным …

Определение 6. Величина $k(s)=\left|\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right|(s)$ (модуль ускорения) называется *кривизной* кривой в точке $\gamma(s)$. Нарисуйте картинку со всеми действующими лицами!

Задача 9. Выразите k
(а) для произвольной параметризации,
(б) для кривой, заданной графиком $y=f(x)$.

Задача 10. Найдите кривизны
(а) параболы, (б) гиперболы, (в) эллипса, (г) циклоиды.

Задача 11. Выразите k через полярные координаты.

Задача 12. Найдите кривизны
(а) спирали Архимеда, (б) логарифмической спирали $\rho=ae^{m\varphi}$,
(в) кардиоиды, (г) лемнискаты $\rho^2=2a^2\cos2\varphi$.
Не забудьте про картинки!

Геом-9*. Формулы Френе
(22 марта 2006 г.)

Плоская кривая общего положения n-й степени задается $n+1$ своей точкой. Касательная прямая $\deg=1$ проходит через 2 слипшиеся точки. Окружность кривизны $\deg=2$ — через три.

Определение 1. Окружность, имеющая с данной кривой касание не ниже второго порядка (как это?) называется окружностью кривизны, а ее радиус R — радиусом кривизны в данной точке. Центром кривизны называется центр этой окружности.

Задача 1. Докажите, что
(а) $k=1/R$;
(б) центр кривизны лежит на нормали в данной точке.

Указание. Теорема о неявной функции гласит, что в окрестности любой регулярной точки наша кривая является графиком функции (в некоторой прямоугольной системе координат), а для этого случая все явно вычисляется.

Задача 2 (формулы Френе). Если для регулярной кривой $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}(s)$ (s — натуральный параметр) k нигде не обращается в нуль, то:

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}=0\cdot\mathbf{v}+k\cdot\mathbf{n},$$
$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-k\cdot\mathbf{v}+0\cdot\mathbf{n};$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости, $\mathbf{w}$ — вектор ускорения, а $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ — единичный вектор нормали.

Задача 3. Опишите все кривые с
(а) $k\equiv 0$, (б) $k\equiv\mathrm{const}$.

Задача 4. Докажите, что если задана хорошая положительная функция $k(s)$, то кривая $\boldsymbol{\gamma}(s)$ восстанавливается однозначно, с точностью до движения плоскости.

Кривые в пространстве

Задача 5. Найдите длину следующих кривых:
(а) $x=3t,\ y=3t^2,\ z=2t^3$ от $(0,0,0)$ до $(3,3,2)$;
(б) $x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t,\ z=e^{-t}$, при $t\in(0,+\infty)$;
(в) $(y-x)^2=a(y+x)$, $y^2-x^2=\frac{9}{8}z^2$ от $(0,0,0)$ до (x_0,y_0,z_0).

Задача 6*. На сколько увеличится длина экватора, если радиус Земли увеличить на 1 см?

Задача 7. Докажите правило Лейбница для векторного произведения $[\cdot,\cdot]$.

По-прежнему у нас есть векторы скорости $\mathbf{v}$ и ускорения $\mathbf{w}$, но в $\mathbb{R}^3$ они уже не составляют базиса — нужен еще один вектор.

Определение 2. Вектор $\mathbf{b}=[\mathbf{v},\mathbf{n}]$ называется *бинормалью*. (Как это выглядит на картинке?)

Задача 8 (формулы Френе). Для регулярной нормально параметризованной кривой верно следующее:

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}=0\cdot\mathbf{v}+k\cdot\mathbf{n}+0\cdot\mathbf{b},$$
$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-k\cdot\mathbf{v}+0\cdot\mathbf{n}-\kappa\cdot\mathbf{b},$$
$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=0\cdot\mathbf{v}+\kappa\cdot\mathbf{n}+0\cdot\mathbf{b},$$

где κ определяется из последнего равенства и называется *кручением*.

Задача 9. Опишите все кривые
(а) с нулевым кручением,
(б)* с постоянными кручением и кривизной.

Задача 10. Найдите кривизну и кручение кривых:
(а) **(винтовая линия)** $\boldsymbol{\gamma}(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$;
(б) $\boldsymbol{\gamma}(t)=e^{-t}(\cos t,\sin t,1)$;
(в) $\boldsymbol{\gamma}(t)=a(\operatorname{ch} t,\operatorname{sh} t,t)$;
(г) $\boldsymbol{\gamma}(t)=(t^2\sqrt{3}/2,\,2-t,\,t^3)$;
(д) $\boldsymbol{\gamma}(t)=(3t-t^3,\,3t^2,\,3t+t^3)$.
Нарисуйте картинку в каждом случае.

Задача 11*. Докажите, что если задана хорошая положительная функция $k(s)$ и хорошая функция $\kappa(s)$, то кривая $\boldsymbol{\gamma}(s)$ восстанавливается однозначно, с точностью до движения пространства.

Задача 12*. (а) Сформулируйте формулы Френе для $\mathbb{R}^n$.
(б) Докажите их. (в) Однозначность.

Указание. Кососимметрические матрицы $n\times n$ образуют касательную алгебру к группе Ли $\mathrm{SO}(n)$ движений в $\mathbb{R}^n$.

Ан-15. Вероятности
(26 апреля 2006 г.)

Пусть задано конечное множество и каждому его элементу приписано неотрицательное число, причем сумма этих чисел равна 1. Такое множество называют *вероятностным пространством* (конечным), его элементы называют *исходами*, а приписанные им числа — *вероятностями* исходов.

Пример (n-кратное бросание «честной» монеты). Исходами являются последовательности из n нулей и единиц (орлов и решек); все исходы равновероятны (имеют вероятность $1/2^n$).

Определение 1. *Событием* называют множество исходов; *вероятностью* события называют сумму вероятностей составляющих его исходов. Если все исходы равновероятны, то вероятность события есть отношение числа «благоприятных» исходов (входящих в событие) к общему числу исходов. Вероятность события A обозначают $\Pr[A]$.

Задача 1. Найти вероятность того, что при n-кратном бросании честной монеты

(а) не выпадет ни одного орла;

(б) выпадет не более одного орла;

(в) выпадет хотя бы один орел;

(г) выпадет ровно два орла;

(д) выпадет нечетное число орлов.

(е) Какое событие при 100-кратном бросании честной монеты более вероятно: выпадение 49 орлов или 50 орлов? Во сколько раз?

Задача 2. (а) Каково вероятностное пространство для n-кратного бросания «честной» игральной кости (на гранях написаны числа от 1 до 6)? Что вероятнее: при шести бросаниях получить хотя бы одну шестерку или не получить ни одной шестерки?

(б) Игральную кость бросили два раза и результаты сложили. Какое значение суммы наиболее вероятно?

Игральную кость бросили n раз.

(в) Какова вероятность выпадения ровно k шестерок?

(г) При каком k эта вероятность максимальна?

Задача 3. Колоду из N карт, на которых написаны числа $1, \ldots, N$, тасуют в случайном порядке.

(а) Каково соответствующее вероятностное пространство?

(б) Какова вероятность того, что число 1 будет стоять на первом месте?

(в) Какова вероятность того, что число 3 будет идти раньше числа 2, но после числа 1?

(г)* Какова вероятность того, что ни одна карта не будет стоять на прежнем месте (карта с числом i не будет стоять на i-м месте)?

Задача 4. В лотерее надо указать 6 чисел от 1 до 49, при розыгрыше также выбирают случайно 6 чисел от 1 до 49. Какова вероятность

(а) угадать все шесть чисел?

(б) не угадать ни одного числа из шести?

(в) угадать ровно 5 чисел из шести?

Определение 2. *Условной вероятностью* события A при условии события B называют отношение $\Pr[A \mid B] = \Pr[A \text{ и } B]/\Pr[B]$. (Предполагается, что $\Pr[B] > 0$.)

Задача 5. Найти условную вероятность выпадения двух орлов в двух бросаниях, если известно что:

(а) хотя бы один орел выпал;

(б) на первом шаге выпал орел;

(в) на втором шаге выпал орел.

Определение 3. Событие A называют *независимым* от события B, если $\Pr[A|B] = \Pr[A]$.

Задача 6. Доказать, что отношение независимости симметрично: если A независимо от B, то B независимо от A.

Задача 7. (а) Будут ли события «выпало четное число» и «выпало число, делящееся на 3» независимы при бросании кости?

(б) Будут ли (для трех бросаний монеты) события «при первом бросании монеты выпал орел» и «выпало ровно два орла» независимы?

(в) Тот же вопрос для событий «при первом бросании выпал орел» и «число орлов нечетно».

(г) Тот же вопрос для событий «при первом бросании выпал орел» и «при втором и третьем бросании был хотя бы один орел».

Задача 8. Событие B и событие C независимы от события A. Можно ли утверждать, что событие «B и C» независимо от события A?

Задача 9. Монету бросают n раз. Событие A определяется результатами первых k бросаний, событие B — результатами последних $n-k$ бросаний. Показать, что события A и B независимы.

Задача 10. Найти условную вероятность $\Pr[A|B]$, если известна условная вероятность $\Pr[B|A]$, а также безусловные вероятности $\Pr[A]$ и $\Pr[B]$. (Ответ к этой задаче называют *формулой Байеса*.)

Задача 11*. Имеется N мешков по N монет, в каждом мешке λ фальшивых. Мы проверяем наугад по одной монете из мешка. Каковы вероятности найти среди них 0, 1, 2, … фальшивых (при $N \to \infty$ и фиксированном λ)?

Задача 12*. В очередь за газетами ценой в полтинник становятся в случайном порядке n человек с полтинниками и n человек с рублями. Какова вероятность того, что всем хватит сдачи, если изначально ни у них, ни у продавца других денег нет?

Сергеев Пётр Валентинович

Математика в спецклассах 57-й школы

Математический анализ

Подписано в печать 15.12.2007 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 10. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241–74–83.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 241–72–85. E-mail: biblio@mccme.ru