Понятие степени

Поршнев Е.

Основная цель этой лекции — придать смысл выражению a^b (*a в степени b*). С самого начала сформулируем те свойства степени, к которым мы все привыкли:

1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.
2. $(a^b)^c = a^{bc}$.
3. $a^c \cdot b^c = (ab)^c$.
4. Пусть $a > b > 0$. Если $c > 0$, то $a^c > b^c$; если $c < 0$, то $a^c < b^c$.
5. Пусть $b > c$. Если $a > 1$, то $a^b > a^c$; если $1 > a > 0$, то $a^b < a^c$.

Напомним определение степени с натуральным показателем.

Определение 1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$. Тогда по определению $a^b = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ раз}}$.

Лемма 1. *Свойства 1–5 выполняются для степени с натуральным показателем.*

$\square$ Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения. $\blacksquare$

Несложно расширить определение степени на случай $b \in \mathbb{Z}$ (правда при этом придётся ограничить себя случаем $a \neq 0$).

Определение 2. Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{Z}$. Тогда по определению

$$a^b = \begin{cases} a^b, & b \in \mathbb{N}; \\ 1, & b = 0; \\ 1/a^{-b}, & -b \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Лемма 2. *Свойства 1–5 выполняются для степени с целым показателем.*

$\square$ Свойства степени с целым показателем обычно выводят из свойств степени с натуральным показателем. Детальное доказательство оставляется читателю в качестве упражнения. $\blacksquare$

Перед тем, как определять степень с рациональным показателем, введём понятие корня.

Определение 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Арифметическим корнем n-ой степени из неотрицательного числа a* называется такое неотрицательное число x, что $x^n = a$.
Обозначение: $x = \sqrt[n]{a}$.

Теорема 1. *Для любого неотрицательного вещественного числа a и для любого натурального числа n существует корень $x = \sqrt[n]{a}$.*

$\square$ Случай $a = 0$ тривиален, поэтому будем считать, что $a > 0$.

Рассмотрим множество $M = \{t \mid t^n \leqslant a,\, t \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}$. Это множество очевидно не пусто (ведь $0 \in M$) и ограничено сверху (числом $\max(a, 1)$). Поэтому из аксиомы о точной верхней грани следует, что существует $x = \sup M$. Покажем, что $x^n = a$.

Предположим, что $x^n = a + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Рассмотрим маленькое число $\delta \in (0, x)$ и $y = x - \delta$. Оценим y^n.

$$|x^n - y^n| = |x - y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}| < \delta \cdot (nx^{n-1})$$

Последнее неравенство обусловлено тем, что в силу $y < x$ каждое из слагаемых меньше, чем x^{n-1}, а всего слагаемых в точности n. В частности, если выбрать $\delta < \dfrac{\varepsilon}{nx^{n-1}}$, то $|x^n - y^n| < \varepsilon$ и тем самым $y^n > a$. Значит, y — верхняя грань множества M и при этом $y < x$. Это противоречит выбору x.

Предположим, что $x^n = a - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Рассмотрим маленькое число $\delta \in (0, x)$ и $y = x + \delta$. Оценим y^n.

$$|x^n - y^n| = |x - y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}| < \delta \cdot (n(2x)^{n-1})$$

Последнее неравенство обусловлено тем, что $y < 2x$. Если выбрать $\delta < \dfrac{\varepsilon}{n(2x)^{n-1}}$, то $|x^n - y^n| < \varepsilon$ и тем самым $y^n < a$. Значит, $y \in M$, что противоречит выбору x.

Теорема доказана. ■

Определение 4. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Тогда по определению $a^b = \sqrt[n]{a^m}$.

Утверждение 1. Определение 4 корректно, то есть не зависит от представления числа b в виде дроби.

□ Пусть $b = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$. Обозначим $r_1 = \sqrt[n_1]{a^{m_1}}$, $r_2 = \sqrt[n_2]{a^{m_2}}$. Нам нужно проверить, что $r_1 = r_2$.

Из определения корня следует, что $r_1^{n_1} = a^{m_1}$ и $r_2^{n_2} = a^{m_2}$. Из свойства 2 степени с целым показателем следует, что

$$r_1^{n_1 m_2} = (r_1^{n_1})^{m_2} = (a^{m_1})^{m_2} = a^{m_1 m_2} = (a^{m_2})^{m_1} = (r_2^{n_2})^{m_1} = r_2^{n_2 m_1}.$$

Из равенства $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$ следует, что $n_1 m_2 = n_2 m_1$. А значит, в силу свойства 4 числа r_1 и r_2 совпадают. ■

Утверждение 2. В случае $b \in \mathbb{Z}$ определение 4 согласуется с определением 2.

□ Действительно, если $b = \frac{m}{1}$, то $\sqrt[1]{a^m} = a^m$. ■

Лемма 3. *Свойства 1–5 выполняются для степени с рациональным показателем.*

□ Свойства степени с рациональным показателем обычно выводят из свойств степени с целым показателем. Детальное доказательство оставляется читателю в качестве упражнения. ■

Лемма 4. *Пусть $a > 0$ — вещественное число и (x_n) — последовательность рациональных чисел, стремящаяся к нулю. Тогда $\lim a^{x_n} = 1$.*

□ Предположим, что $a \geqslant 1$. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. По аксиоме Архимеда существует натуральное число $k > \frac{a-1}{\varepsilon}$. Тогда $(1+\varepsilon)^k \geqslant 1+k\varepsilon > a$. Значит, $a^{1/k} < 1+\varepsilon$. Кроме того $a^{1/k} < 1+\varepsilon < \frac{1}{1-\varepsilon}$, поэтому $a^{-1/k} > 1 - \varepsilon$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, найдётся такое N, что для всех $n > N$ выполнено $|x_n| < \frac{1}{k}$.
Тогда $a^{x_n} \in (a^{-1/k}, a^{1/k}) \subset (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

Случай $a < 1$ сводится к уже разобранного с помощью равенства $a^{x_n} = (1/a)^{-x_n}$. ■

Ну и наконец перейдём к случаю $b \in \mathbb{R}$.

Утверждение 3. Пусть a и b — вещественные числа, причём $a > 0$. Тогда найдётся последовательность рациональных чисел (x_n), такая что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$.

□ Рассмотрим произвольную последовательность рациональных чисел, **монотонно** стремящуюся к b, все члены которой лежат на интервале $(b/2, b)$. Тогда её можно взять в качестве (x_n). Действительно, в силу свойства 5 степени с рациональным показателем последовательность (a^{x_n}) тоже будет монотонной (возрастающей или убывающей в зависимости от того, больше единицы a или меньше) и все её члены заключены между $a^{b/2}$ и a^b. Значит, по теореме Вейерштрасса у неё есть предел. ■

Утверждение 4. Пусть a и b — вещественные числа, причём $a > 0$. Для любой последовательности рациональных чисел (y_n), такой что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n}$, и этот предел не зависит от выбора последовательности (y_n).

□ Пусть (x_n) — последовательность из предыдущего утверждения. Мы уже знаем, что существует предел $s = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n} = s$.

Действительно, $a^{y_n} = a^{x_n} + (a^{y_n} - a^{x_n}) = a^{x_n} + a^{x_n}(a^{y_n - x_n} - 1)$. Из леммы 4 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n - x_n} = 1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{y_n-x_n} - 1) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}(a^{y_n-x_n} - 1) = 0$. Значит, последовательность (a^{y_n}) имеет предел, и этот предел равен s. ■

Определение 5. Пусть a и b — вещественные числа, причём $a > 0$. Рассмотрим произвольную последовательность рациональных чисел (y_n), стремящуюся к b. По определению полагаем $a^b = \lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n}$. Утверждение 4 гарантирует нам, что этот предел существует и не зависит от выбора последовательности (y_n).

Утверждение 5. В случае $b \in \mathbb{Q}$, определение 5 согласуется с определением 4.

$\square$ Поскольку $b \in \mathbb{Q}$, можно взять $y_n = b$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n} = a^b$. $\blacksquare$

Теорема 2. *Свойства 1–5 выполняются для степени с вещественным показателем.*

Доказательство теоремы мы разобьём на цепочку утверждений.

Утверждение 6. Выполнено равенство $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

$\square$ Рассмотрим произвольные последовательности рациональных чисел $x_n \to b$ и $y_n \to c$. Тогда последовательность $(x_n + y_n)$ стремится к $b + c$ и

$$a^b \cdot a^c = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot a^{y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n+y_n} = a^{b+c}.$$

$\blacksquare$

Следствие 1. Выполнено равенство $a^{-b} = 1/a^b$.

$\square$ $1 = a^0 = a^{b+(-b)} = a^b \cdot a^{-b}$. $\blacksquare$

Утверждение 7. Выполнено равенство $a^c \cdot b^c = (ab)^c$.

$\square$ Рассмотрим произвольную последовательность рациональных чисел $x_n \to c$.
Тогда $a^c \cdot b^c = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot b^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (ab)^{x_n} = (ab)^c$. $\blacksquare$

Следствие 2. Выполнено равенство $\frac{1}{a^b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b$.

$\square$ Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения. $\blacksquare$

Утверждение 8. Пусть $b > c$. Если $a > 1$, то $a^b > a^c$; если $1 > a > 0$, то $a^b < a^c$.

$\square$ Пусть $a > 1$. Возьмём какое-нибудь рациональное число $q \in (0, b - c)$ и последовательность рациональных чисел $x_n \to b - c$, все члены которой больше q. Тогда все члены последовательности a^{x_n} не меньше, чем a^q. Поэтому $a^{b-c} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} \geqslant a^q > 1$. Теперь применим утверждение 1: $a^b = a^c \cdot a^{b-c} > a^c$.

Если же $a < 1$, то наоборот $a^{b-c} \leqslant a^q < 1$ и $a^b < a^c$. $\blacksquare$

Следствие 3. Пусть $a > 0$ — вещественное число и (x_n) — последовательность вещественных чисел, стремящаяся к нулю. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$.

$\square$ Для определённости будем считать, что $a \geqslant 1$. Для каждого натурального n выберем пару рациональных чисел y_n и z_n так, что $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ и при этом $|y_n| \leqslant 2|x_n|$ и $|z_n| \leqslant 2|x_n|$. Тогда обе последовательности (y_n) и (z_n) стремятся к нулю. Поэтому из леммы 4 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{z_n} = 1$. Из утверждения 8 следует, что $a^{y_n} \leqslant a^{x_n} \leqslant a^{z_n}$. Применяя теорему о двух милиционерах, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$.

Если же $a < 1$, всё аналогично за исключением того, что $a^{y_n} \geqslant a^{x_n} \geqslant a^{z_n}$. $\blacksquare$

Следствие 4. Пусть $b > 0$ — вещественное число и (a_n) — последовательность вещественных чисел, стремящаяся к единице. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^b = 1$.

$\square$ Выберем натуральное число $N \geqslant |b|$. Аксиома Архимеда гарантирует нам, что это можно сделать. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^N = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-N} = 1$. Из утверждения 8 следует, что для каждого n выполнено либо $a_n^{-N} \leqslant a_n^b \leqslant a_n^N$, либо $a_n^N \leqslant a_n^b \leqslant a_n^{-N}$ (в зависимости от того, больше единицы a_n или меньше). Применяя теорему о двух милиционерах, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^b = 1$. $\blacksquare$

Утверждение 9. Пусть $a > b > 0$. Если $c > 0$, то $a^c > b^c$; если $c < 0$, то $a^c < b^c$.

$\square$ Пусть $c > 0$. Возьмём какое-нибудь рациональное число $q \in (0, c)$ и последовательность рациональных чисел $x_n \to c$, все члены которой больше q. Тогда все члены последовательности $(a/b)^{x_n}$ не меньше, чем $(a/b)^q$. Поэтому $(a/b)^c = \lim\limits_{n\to\infty} (a/b)^{x_n} \geqslant (a/b)^q > 1$. Значит, $a^c > b^c$. Теперь применим утверждение 3: $a^c = b^c \cdot (a/b)^b > b^c$.

Если же $c < 0$, то $a^{-c} > b^{-c}$ и из следствия 1 получаем $a^c < b^c$. $\blacksquare$

Утверждение 10. Выполнено равенство $(a^b)^c = a^{bc}$.

$\square$ Рассмотрим произвольные последовательности рациональных чисел $x_n \to b$ и $y_n \to c$. Распишем

$$(a^b)^c - a^{bc} = ((a^b)^c - (a^{x_n})^c) + ((a^{x_n})^c - (a^{x_n})^{y_n}) + ((a^{x_n})^{y_n} - a^{x_n y_n}) + (a^{x_n y_n} - a^{bc}).$$

Теперь будем рассматривать получившиеся слагаемые по одному.

$$\begin{aligned}
(a^b)^c - (a^{x_n})^c &= (a^b)^c \left(1 - (a^{x_n})^c \frac{1}{(a^b)^c}\right) \\
&= (a^b)^c \left(1 - (a^{x_n})^c \left(\frac{1}{a^b}\right)^c\right) \\
&= (a^b)^c \left(1 - (a^{x_n})^c (a^{-b})^c\right) \\
&= (a^b)^c \left(1 - (a^{x_n} \cdot a^{-b})^c\right) \\
&= (a^b)^c \left(1 - (a^{x_n - b})^c\right).
\end{aligned}$$

Здесь мы последовательно воспользовались следствием 2, следствием 1, утверждением 7 и утверждением 6.

Из следствия 3 мы знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n - b} = 1$. Далее, из следствия 4 заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{x_n-b})^c = 1$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} (a^b)^c - (a^{x_n})^c = 0$.

С первым слагаемым разобрались. Теперь второе:

$$\begin{aligned}
(a^{x_n})^c - (a^{x_n})^{y_n} &= (a^{x_n})^{y_n} \left((a^{x_n})^c \frac{1}{(a^{x_n})^{y_n}} - 1\right) \\
&= (a^{x_n})^{y_n} \left((a^{x_n})^c (a^{x_n})^{-y_n} - 1\right) \\
&= (a^{x_n})^{y_n} \left((a^{x_n})^{c - y_n} - 1\right)
\end{aligned}$$

Обозначим $\alpha = \frac{1}{2}a^b$, $\beta = 2a^b$. Последовательность (a^{x_n}) стремится к a^b, поэтому начиная с некоторого номера все её члены лежат в интервале (α, β). Из следствия 3 мы знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{c-y_n} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta^{c-y_n} = 1$. Из утверждения 9 следует, что для каждого достаточно большого n выполнено либо $\alpha^{c-y_n} \leqslant (a^{x_n})^{c-y_n} \leqslant \beta^{c-y_n}$, либо $\beta^{c-y_n} \leqslant (a^{x_n})^{c-y_n} \leqslant \alpha^{c-y_n}$ (в зависимости от того, больше нуля $c - y_n$ или меньше). Применяя теорему о двух милиционерах, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{x_n})^{c-y_n} = 1$. Кроме того $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{x_n})^{y_n} = a^{bc}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{x_n})^c - (a^{x_n})^{y_n} = 0$.

Пошли дальше. Третье слагаемое просто равно нулю, а четвёртое стремится к нулю по определению степени. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \left((a^b)^c - a^{bc}\right) = 0$. Но под знаком предела стоит константа, не зависящая от n. Это возможно только в том случае, если $(a^b)^c - a^{bc} = 0$. Утверждение доказано. $\blacksquare$

Ура! На этом доказательство теоремы 2 завершено.

Задача 1. Докажите лемму 3.

Задача 2. Докажите следствие 2.

Задача 3°. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

а) Докажите, что уравнение $a^x = b$ имеет решение.
(Указание: здесь поможет аксиома о точной верхней грани)

б) Докажите, что это решение единственно.

Задача 4*. Возможно ли такое, что $a, b \notin \mathbb{Q}$ и $a^b \in \mathbb{Q}$.