ВМШ, 8 класс, занятие 1, 2 октября 2013 г.

ЧЁТНОСТЬ.

1. По кругу расположены 2013 шестерёнок, причём каждая зацеплена с двумя соседними. Могут ли все шестерёнки вращаться одновременно?

2. Можно ли квадратную доску размером 5x5 замостить доминошками размером 1x2?

3. а) Конь вышел из поля $a1$ и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

б) Можно ли ходом шахматного коня попасть из левого нижнего угла доски в правый верхний, побывав на каждом поле ровно один раз?

4. а) Можно ли замостить доску размером 8x8 доминошками размером 1x2?

б) Из доски размером 8x8 убрали одну угловую клетку. Можно ли замостить оставшуюся часть доски доминошками размером 1x2?

в) Из доски размером 8x8 убрали две противоположные угловые клетки. Можно ли замостить оставшуюся часть доски доминошками размером 1x2?

5. Можно ли так подобрать два целых числа m и n, чтобы сумма $2012m + 2014n$ была равна 575757575757?

6. Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна 0.

7. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки "+", и "-" так, чтобы значение полученного выражения было равно 0?

8. Кузнечик прыгает по прямой, причём в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз — на 2 см и так далее. Докажите, что после 2013 прыжков он не может оказаться там, где начинал.

ВМШ, 8 класс, занятие 1, 2 октября 2013 г.

ЧЁТНОСТЬ.

1. По кругу расположены 2013 шестерёнок, причём каждая зацеплена с двумя соседними. Могут ли все шестерёнки вращаться одновременно?

2. Можно ли квадратную доску размером 5x5 замостить доминошками размером 1x2?

3. а) Конь вышел из поля $a1$ и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

б) Можно ли ходом шахматного коня попасть из левого нижнего угла доски в правый верхний, побывав на каждом поле ровно один раз?

4. а) Можно ли замостить доску размером 8x8 доминошками размером 1x2?

б) Из доски размером 8x8 убрали одну угловую клетку. Можно ли замостить оставшуюся часть доски доминошками размером 1x2?

в) Из доски размером 8x8 убрали две противоположные угловые клетки. Можно ли замостить оставшуюся часть доски доминошками размером 1x2?

5. Можно ли так подобрать два целых числа m и n, чтобы сумма $2012m + 2014n$ была равна 575757575757?

6. Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна 0.

7. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки "+", и "-" так, чтобы значение полученного выражения было равно 0?

8. Кузнечик прыгает по прямой, причём в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз — на 2 см и так далее. Докажите, что после 2013 прыжков он не может оказаться там, где начинал.

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК.

1. В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса AL. Найдите угол LAH, если известно, что $\angle ACB = 57^\circ$ и $\angle ABC = 75^\circ$.

2. а) Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

б) Верно ли обратное?

3. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Оказалось, что $AM = \frac{1}{2}BC$. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

4. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены вне квадрата равносторонние треугольники BKC и CLD. Докажите, что AKL — равносторонний треугольник.

5. Угол при вершине A треугольника ABC равен α.

а) Биссектрисы углов при вершинах B и C пересекаются в точке O. Найдите угол BOC.

б) Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C пересекаются в точке P. Найдите угол BPC.

6. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На боковой стороне AB отмечена точка M. Оказалось, что $AM = MC = BC$. Найдите углы треугольника ABC.

7. Найдите сумму углов при вершинах пятиконечной звезды (см. рисунок).

8. В равнобедренном треугольнике ABC ($\angle BAC = 108^\circ$) проведена биссектриса BD. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная BD. Эта прямая пересекает основание BC в точке E. Докажите, что $AD = DE = EC$.

9. На стороне BC квадрата $ABCD$ отмечены точки K и L, причём $BK = KL = LC$. На стороне AD отмечена точка M, причём $AM = \frac{1}{3}AD$. Найдите сумму углов, под которыми виден отрезок AM из точек K, L и C.

10. Сторона AD прямоугольника $ABCD$ в три раза больше стороны AB. Точки M и N делят сторону AD на три равные части. Найдите сумму углов $\angle AMB$, $\angle ANB$ и $\angle ADB$.

11. Высота и медиана, проведённые из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части. Найдите углы треугольника.

ВМШ, 8 класс, занятие 3, 16 октября 2013 г.

ДЕЛИМОСТЬ. ОСТАТКИ.

1. Докажите, что при всяком целом n: а) $n(n+1)$ делится на 2; б) $n(n+1)(n+2)$ делится на 6; в) $n^5 - n$ делится на 30.

2. Докажите, что если p — простое число, большее 3, то $p^2 - 1$ делится на 24.

3. Целые числа a и b при делении на 18 дают отстатки 7 и 17 соответственно. Что можно сказать об остатках чисел $a + b$ и ab при делении на 18?

4. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11.

6. Может ли число, десятичная запись которого состоит из нулей и 300 единиц, быть квадратом целого числа?

7. К числу 43 слева и справа припишите по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45.

8. Найдите последнюю цифру чисел: а) 2^{2013}; б) 57^{57}.

9. Сколько нулей на конце числа 100! ?

10. Докажите, что из любых пяти целых чисел можно выбрать три, сумма которых делится на 3.

11. Докажите, что $\underbrace{111...111}_{3^n \text{ раз}}$ делится на 3^n.

12. Найдите остаток от деления числа 12345678987654321 на 101.

13. При попытке разделить кулёк конфет на 3, 4 и 5 равных кучек оставалось соответственно 1, 2, 4 конфеты. Сколько останется конфет при делении: а) на 6 или 20 кучек; б) на 7 кучек?

ВМШ, 8 класс, занятие 3, 16 октября 2013 г.

ДЕЛИМОСТЬ. ОСТАТКИ.

1. Докажите, что при всяком целом n: а) $n(n+1)$ делится на 2; б) $n(n+1)(n+2)$ делится на 6; в) $n^5 - n$ делится на 30.

2. Докажите, что если p — простое число, большее 3, то $p^2 - 1$ делится на 24.

3. Целые числа a и b при делении на 18 дают отстатки 7 и 17 соответственно. Что можно сказать об остатках чисел $a + b$ и ab при делении на 18?

4. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11.

6. Может ли число, десятичная запись которого состоит из нулей и 300 единиц, быть квадратом целого числа?

7. К числу 43 слева и справа припишите по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45.

8. Найдите последнюю цифру чисел: а) 2^{2013}; б) 57^{57}.

9. Сколько нулей на конце числа 100! ?

10. Докажите, что любых пяти целых чисел можно выбрать три, сумма которых делится на 3.

11. Докажите, что $\underbrace{111...111}_{3^n \text{ раз}}$ делится на 3^n.

12. Найдите остаток от деления числа 12345678987654321 на 101.

13. При попытке разделить кулёк конфет на 3, 4 и 5 равных кучек оставалось соответственно 1, 2, 4 конфеты. Сколько останется конфет при делении: а) на 6 или 20 кучек; б) на 7 кучек?

МЕДИАНА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЕ СВОЙСТВО ОКРУЖНОСТИ.

1. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если известно, что медиана, проведённая из вершины прямого угла, делит его в отношении 4:5.

2. В трапеции одна сторона вдвое больше каждой из остальных. Докажите, что диагональ перпендикулярна одной из сторон.

3. а) Точка M, отличная от точек A и B, лежит на окружности с диаметром AB. Чему равен угол AMB?

б) Из точки M отрезок AB виден под прямым углом, т.е. $\angle AMB = 90°$. Докажите, что точка M лежит на окружности с диаметром AB.

4. Постройте центр окружности с помощью чертёжного угольника (можно проводить прямые и строить прямые углы).

5. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен $15°$. Найдите гипотенузу.

6. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Докажите, что длина ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ равна периметру треугольника ABC.

7. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Докажите, что прямая, проходящая через точку C и середину гипотнузы, перпендикулярна прямой DK.

8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно DC, пересекает AC в точке E. Докажите, что $EC = 2AD$.

9. В треугольнике ABC проведены биссектриса AK, медиана BL и высота CM. Треугольник KLM — равносторонний. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

10. Даны прямая a и точка A. С помощью циркуля и линейки постройте прямую, проходящую через точку A перпендикулярно прямой a, проведя не более трёх линий, если: а) точка A не лежит на прямой a; б) точка A лежит на прямой a.

11. Высоты AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что прямая, проходящая через середины CH и AB, перпендикулярна прямой MN.

КОМБИНАТОРИКА.

1. Сколькими способами из пяти разных чашек, трёх разных блюдец и четырёх разных чайных ложек можно:

а) выбрать комплект из чашки, блюдца и ложки?

б) выбрать два предмета с разными названиями?

2. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске две клетки:

а) белую и чёрную?

б) белую и чёрную, не лежащие на одной горизонтали и вертикали?

в) две клетки без ограничений?

3. Сколько существует различных способов раскраски граней куба в 2 цвета? Раскраски считаются одинаковыми, если их можно совместить поворотом куба.

4. Сколько всего существует семизначных телефонных номеров (последовательностей цифр от 0 до 9):

а) не начинающихся с восьмёрки?

б) У скольких из них первая цифра нечётная?

в) последняя цифра чётная, первая нечётная, а четвёртая не равна шести?

5. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга?

6. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трёх букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из пяти букв. Сколько слов в языке племени?

7. В установке цветомузыки n разноцветных лампочек. Каждую можно включить или выключить независимо от других.

а) Сколько различных узоров можно получить, включая и выключая лампочки?

б) Тот же вопрос, если гореть должно нечётное количество лампочек.

8. Ладья стоит в левом поле клетчатой доски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо. Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля.

9. В выпуклом n-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько всего точек пересечения диагоналей у этого n-угольника?

10. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они держали под боем все клетки доски?

КОМБИНАТОРИКА.ЧАСТЬ 2.

1. Сколькими способами можно выбрать из набора, состоящего из девяти различных цветных карандашей: а) три карандаша; б) пять карандашей.

2. В гонке участвуют n биатлонистов. а) Сколько существует вариантов распределения мест на финише? (Это число обозначают P_n.); б) Сколько существует вариантов распределения первых k мест? (Это число обозначают A_n^k.); в) Сколько вариантов того, какие спортсмены попадут в первые k мест? (Это число обозначают C_n^k.)

3. Сколько существует вариантов исхода гонки, при которых: а) спортсмен Б обогнал спортсмена У? б) спортсмены Б и С финишируют рядом?

4. Каждый человек из работающих в отделе знает хотя бы один иностранный язык: шесть знают английский, шесть — французский, семь — немецкий, четыре — английский и немецкий, три — немецкий и французский, два — французский и английский. Один человек знает все три языка. а) Сколько человек в отделе? б) Сколько из них знают только один язык?

5. Сколько можно сделать перестановок из n элементов, если известно, что: а) данные элементы a и b не стоят рядом; б) данные элементы a, b и c не стоят рядом; в) никакие два из a, b и c не стоят рядом?

6. Областная дума из 40 депутатов избирает председателя, секретаря и пять членов комиссии по этике. Сколько вариантов выбора, если известно, что должности нельзя совмещать?

7. Сколько различных комбинаций букв можно получить, переставляя буквы слова: а) ЕНИСЕЙ; б) МИССИСИПИ?

8. Докажите, что: а) $C_n^r = C_n^{n-r}$; б)$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$; в) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$; г) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$.

9. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_k$ число $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)!$ делится на $a_1! \cdot a_2! \cdot \cdots \cdot a_k!$.

10. Имеется m белых и n чёрных шаров, причём $m > n$. Сколькими способами их можно разложить в ряд, если известно, что никакие два чёрных не должны лежать рядом?

11. Сколько различных браслетов можно сделать из одного изумруда, трёх рубинов и семи сапфиров (камни одного вида одинаковы), если в браслет входят все 11 камней (браслеты одинаковы, если их можно совместить поворотом или зеркальной симметрией)?

12. Сколькими способами можно выбрать некоторые из чисел 1, 2, 3, ..., 10 так, чтобы среди выбранных не было подряд идущих?

ВМШ, 8 класс, занятие 7, 20 ноября 2013 г.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.

1. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки, равные a и b. Найдите стороны параллелограмма.

2. а) Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

б) Докажите, что если в четырёхугольнике нет параллельных сторон, то середины двух любых противоположных сторон и середины диагоналей являются вершинами параллелограмма.

3. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей.

4. Прямая имеет с параллелограммом $ABCD$ единственную общую точку B. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния a и b. На какое расстояние удалена от этой прямой вершина D?

5. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма, не являющегося ромбом, при пересечении образуют прямоугольник. Найдите диагональ этого прямоугольника, если стороны параллелограмма равны a и b ($a > b$).

6. а) Через каждую вершину треугольника ABC провели прямую, параллельную противолежащей стороне. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения проведённых прямых. Докажите, что A, B и C — середины сторон треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Докажите, что прямые, на которых лежат высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

7. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешних углов B и C. Известно, что периметр треугольника ABC равен 10. Найдите MP.

8. В выпуклом четырёхугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырёхугольника. Докажите, что диагонали равны.

9. Точка M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$, точка H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую AM. Докажите, что треугольник CBH равнобедренный.

10. Постройте треугольник по трём медианам.

11. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры также образуют квадрат.

12. Внутри треугольника ABC взята точка P, причём $\angle PAC = \angle PBC$. Из точки P на стороны BC и CA опущены перпендикуляры PM и PK соответственно. Пусть D — середина стороны AB. Докажите, что $DK = DM$.

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ.

1. Докажите, что нельзя посадить семерых зайцев в три клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не больше двух зайцев.

2. При делении одного натурального число на другое получилась десятичная дробь. Докажите, что она либо конечная, либо бесконечная периодическая.

3. В классе 30 человек. Саша Иванов в диктанте сделал 13 ошибок, а остальные — меньше. Докажите, что по крайней мере три ученика сделали ошибок поровну (может быть 0 ошибок).

4. В первенстве страны по футболу участвуют 20 команд. Каждые две из них должны сыграть один матч. Докажите, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей.

5. Докажите, что из любых 12 натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 11.

6. В строку выписано n чисел. Докажите, что либо одно из них, либо сумма нескольких рядом стоящих делится на n.

7. В квадрат со стороной 1 м бросили произвольным способом 51 точку. Докажите, что каке-то три из них можно накрыть квадратиком со стороной 0,2.

8. Несколько дуг окружности покрашены в чёрный цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

9. На плоскости даны семь прямых, никакие две из них не параллельны. Докажите, что найдутся две из них, угол между которыми меньше $26°$. Верно ли аналогичное утверждение, если $26°$ заменить на $25°$?

10. Докажите, что среди натуральных чисел, записываемых только единицами (например, 11111), есть число, делящееся на 2013.

11. Докажите, что существует натуральная степень тройки, оканчивающаяся на 001.

12. На клетчатой бумаге отмечены пять произвольных узлов. Докажите, что середина одного из отрезков, соединяющего какие-то две из этих точек, также является узлом сетки.

13. В квадрате со стороной 1 произвольно берут 101 точку (не обязательно внутри квадрата, возможно, часть на сторонах), причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше 0,01.

ВМШ, 8 класс, занятие 9, 4 декабря 2013 г.

ПОСТРОЕНИЯ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ.

Простейшие построения:

1) построение суммы и разности двух данных отрезков;

2) построение треугольника по трём сторонам;

3) построение угла, равного данному;

4) построение треугольника по двум сторонам и углу между ними (по стороне и двум прилежащим к ней углам);

5) построение середины данного отрезка;

6) построение биссектрисы данного угла;

7) построение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку, лежащую: а) на данной прямой; б) вне данной прямой;

8) построение прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку.

9) деление отрезка на n равных частей.

Задачи.

1. Постройте треугольник по данным серединам трёх его сторон.

2. Постройте треугольник по стороне и медианам, проведённым к двум другим его сторонам.

3. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведённой из вершины прямого угла.

4. Имеются две точки A и B. Пользуясь только циркулем удвойте отрезок AB, т.е. постройте такую точку C, чтобы точка B была серединой отрезка AC (сам отрезок AB отсутствует).

5. Дан угол, равный 19°. Разделите его на 19 равных частей.

6. Через точку, лежащую вне окружности, проведите касательную к этой окружности.

7. Внутри данного угла отмечена точка. Через эту точку проведите прямую так, чтобы её отрезок, заключённый внутри угла, делился бы этой точкой пополам.

8. Постройте трапецию: а) по основаниям и боковым сторонам; б) по основаниям и диагоналям.

9. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

10. Точки A и B расположены по одну сторону от прямой l. Постройте на этой прямую точку M, для которой сумма $AM + MB$ была бы наименьшей.

11. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l. Постройте на этой прямой точку M, для которой биссектриса угла AMB лежала бы на прямой l.

12. Постройте пятиугольник по данным серединам всех его сторон.

13. Постройте квадрат по четырём точкам, лежащим на четырёх его сторонах.

ВМШ, 8 класс, занятие 10, 11 декабря 2013 г.

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ. ЧАСТЬ 2.

1. 15 мальчиков собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое количество орехов.

2. Докажите, что среди любых 52 целых чисел можно выбрать два числа так, чтобы их сумма или разность делилась на 100

3. Верно ли, что из любых 30 различных натуральных чисел, не больших 50, всегда можно выбрать два, одно из которых ровно вдвое больше другого.

4. Докажите, что правильный треугольник нельзя покрыть двумя меньшими правильными треугольниками.

5. Докажите, что в любой компании из 10 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

6. Какое максимальное количество: а) королей; б) коней; в) слонов можно поставить на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

7. В языке племени Абба две буквы. Известно, что никакое слово не является началом другого. Может ли словарь языка племени содержать 3 четырёхбуквенных, 10 пятибуквенных, 30 шестибуквенных и 5 семибуквенных слов?

8. На планете в звёздной системе Тау Кита суша занимает больше половины площади планеты. Докажите, что жители планеты могут прорыть прямой туннель, проходящий через центр планеты.

9. В некотором десятизначном числе первая цифра равна числу нулей в записи этого числа, вторая — числу единиц, третья — числу двоек и т.д., последняя — числу девяток. Найдите это число.

10. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

Занятие 11. Взвешивания

Задача 1. 3 яблока и 1 ананас весят столько же, сколько 10 персиков. 6 персиков и 1 яблоко весят столько же, сколько 1 ананас. Сколько персиков надо взять, чтобы уравновесить ананас?

Задача 2. Круглое бревно весит 20 кг. Сколько весит другое бревно, если оно вдвое толще, но вдвое короче первого?

Задача 3. а) Есть 3 монеты, одна из которых фальшивая — она легче настоящих. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь можно выявить фальшивую монету? А если монет б) 9, в) 81, г) 57?

Задача 4. Монеты достоинством 1, 2, 3 и 5 тугриков весят, соответственно, 10, 20, 30 и 50 граммов. Среди четырех монет разного достоинства одна фальшивая, отличающаяся весом от обычной (но неизвестно, легче она или тяжелее). Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету?

Задача 5. Имеется 4 самоцвета, различных по весу. Как найти самый тяжелый и самый лёгкий самоцветы на чашечных весах без гирь за 4 взвешивания?

Задача 6. Имеется 57 мешков, в каждом по 2013 монет. В 56 мешках монеты настоящие, а в одном — фальшивые. Известно, что настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Как за одно взвешивание на электронных весах определить, в каком мешке фальшивые монеты? Электронные весы позволяют определить вес произвольного набора монет.

Задача 7. В ряд лежит 1023 апельсина, упорядоченные по весу от самого легкого до самого тяжелого. Сколько нужно сделать взвешиваний на чашечных весах без гирь, чтобы добавить в ряд 1024-й апельсин так, чтобы апельсины снова оказались упорядоченными?

Задача 8. 9 одинаковых по виду монет расположены по кругу. Из этих монет 5 настоящие, а 4 — фальшивые. Никакие две фальшивые монеты не лежат рядом. Настоящие монеты весят одинаково, и фальшивые — одинаково (фальшивая монета тяжелее настоящей). Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить все фальшивые монеты?

Задача 9. В амбаре есть 5 больших мешков с мукой. Мельник стал взвешивать мешки парами, по два, и получил ряд чисел, которые мы расположили в порядке возрастания:

110 кг, 112 кг, 113 кг, 114 кг, 115 кг, 116 кг, 117 кг, 118 кг, 120 кг, 121 кг.

Как узнать, сколько весит каждый мешок в отдельности?

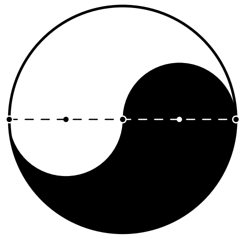
Занятие 11. Дополнительные задачи

Задача 10. Как разложить n гирь весом 1 г, 2 г, 3 г, $\ldots$, n г на три равные по весу кучки, если а) $n = 102$, б) $n = 2013$.

Задача 11. Некий раджа, умирая, оставил сыновьям в наследство бриллианты. В соответствии с завещанием, старший сын получил 1 бриллиант и седьмую часть всех оставшихся бриллиантов; потом второй сын получил 2 бриллианта и седьмую часть всех оставшихся бриллиантов; затем третий сын — 3 бриллианта и седьмую часть всех оставшихся бриллиантов и т. д. Сколько было сыновей у раджи и сколько было бриллиантов, если известно, что сыновей было не более 25, а наследство было поделено без остатка?

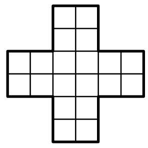
Задача 12. Имеется 1000 монет, среди них 0, 1 или 2 фальшивые. Известно, что фальшивые монеты имеют одинаковую массу, отличную от массы нефальшивых монет. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить, есть ли фальшивые монеты и легче они или тяжелее нормальных? (Количество монет определять не надо.)

РАЗРЕЗАНИЯ

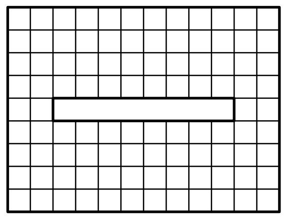


1. Как от куска материи в $\frac{2}{3}$ метра отрезать полметра, не используя метра?

2. Разделите «инь и янь» одним криволинейным разрезом на две равные фигуры так, чтобы и белые, и чёрные части этих фигур были равны.

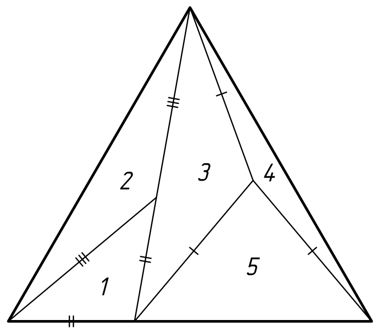


3. Изображённую на рисунке фигуру («греческий крест») разрежьте: а) на пять частей; б) на четыре части, из которых можно сложить квадрат.



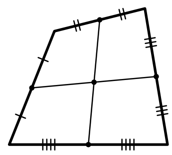
4. Изображённую на рисунке фигуру («прямоугольник 12×9 с дыркой 8×1 в центре») разрежьте на две равные части, из которых можно сложить квадрат.

5. Можно ли из листа картона размером 14×14 вырезать пять квадратов размером 5×5?



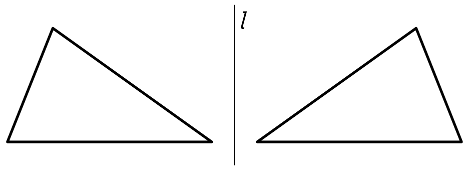
6. Равносторонний треугольник разрезан на пять равнобедренных треугольников с попарно различными углами при вершинах так, как показано на рисунке. Найдите углы при основаниях этих равнобедренных треугольников.

7. Можно ли разрезать выпуклый семнадцатиугольник на 14 треугольников?



8. Выпуклый четырёхугольник разрезали на четыре части по отрезкам, соединяющим середины его противоположных сторон. Докажите, что из этих частей можно составить параллелограмм.

9. Разрежьте правильный шестиугольник а) на три равные части; б) на четыре равные части; в) на шесть равных частей; г) на восемь равных частей.

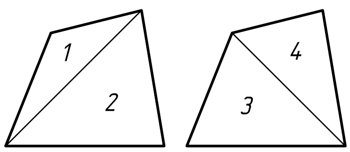


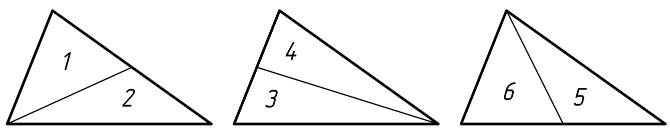
10. На рисунке показаны равные симметричные относительно прямой l треугольники. Двумя прямолинейными разрезами разделите левый из них на три части, из которых можно сложить правый, если части разрешается только сдвигать и поворачивать, но не переворачивать.

Занятие 12. Дополнительные задачи

11. Докажите, что любой треугольник можно разрезать не более чем на три части, из которых складывается равнобедренный треугольник.

12. а) Два одинаковых выпуклых четырёхугольника разрезаны: первый — по одной диагонали, а второй — по другой диагонали. Докажите, что из полученных четырёх треугольников можно сложить параллелограмм.





б) Три одинаковых треугольника разрезаны по разным медианам. Сложите из шести полученных треугольников один треугольник.

13. Одним прямолинейным разрезом отрежьте от треугольника трапецию, у которой меньшее основание было бы равно сумме боковых сторон.

ДЕЛИМОСТЬ. ОСТАТКИ.

1. 1 января 2014 года было средой. Каким днем недели будет:

а) 1 января 2015 года; б) 1 января 2018 года; в) 1 января 2114 года?

(В григорианском календаре годы, номера которых делятся на 100, но не делятся на 400, не являются високосными. Например, 1700, 1800, 1900, 2100 не високосные годы, а 1600 и 2000 — високосные.)

2. p, $p+10$ и $p+14$ — простые числа. Найдите p.

3. Петя заменил в примере на умножение одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными, и получил `АВ·ВГ=ДДЕЕ`. Докажите, что он ошибся.

4. Можно ли купюрами достоинством в 1 тугрик, 10 тугриков, 100 тугриков и 1000 тугриков отсчитать 1000000 тугриков так, чтобы получилось равно 500000 купюр?

5. Может ли квадрат натурального числа оканчиваться на: а) 2; б) 42?

6. Какой цифрой оканчивается десятичная запись числа: а) 3^{33333}; б) $9999^{999^{99^{9}}}$; в) $7^{7^{7}}$?

г) Какой остаток от деления 2^{10000} на 7?

7. Докажите, что если p и $2p+1$ — простые и $p > 3$, то $4p+1$ — составное.

8. Шестизначное число делится на 7, его первую цифру переставили на последнее место. Докажите, что получившееся число тоже будет делится на 7.

9. Какая последняя ненулевая цифра в десятичной записи числа 100! ?

10. Дано 2014-значное число. Известно что любые 50 его подряд идущих цифр образуют число, делящееся на 2^{50}. Докажите, что исходное число делится на 2^{999}

11. Докажите, что число $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$ не может быть целым.

12. Семь простых чисел, меньших 1000, образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ.

1. Касательная к окружности — это прямая, которая имеет с окружностью ровно одну общую точку. Эта точка называется точкой касания. Докажите следующие свойства касательной:

а) касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания;

б) если из точки M, лежащей вне окружности с центром O, проведены к окружности касательные MA и MB (A и B — точки касания), то $MA = MB$, MO — биссектриса угла AMB, а прямая MO перпендикулярна отрезку AB и делит его пополам.

2. Окружность касается всех сторон четырёхугольника. Докажите, что суммы противоположных сторон этого четырёхугольника равны.

3. Докажите, что прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведённому в эту точку, — касательная к окружности.

4. С помощью циркуля и линейки через данную точку проведите касательную к данной окружности.

5. Докажите, что радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c, можно вычислить по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$.

6. Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Под каким углом из центра окружности виден отрезок секущей, заключённый между параллельными прямыми?

7. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ACD, касается отрезка CD в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

8. Стороны треугольника ABC касаются некоторой окружности в точках K, P и M, причём точка M расположена на стороне BC. Найдите угол KMP, если $\angle BAC = 70°$.

9. Две прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B. Может ли прямая, проходящая через середины отрезков AM и BM, касаться этой окружности?

10. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$.

а) Окружность, вписанная в этот треугольник, касается стороны AC в точке P. Найдите AP.

б) Окружность, касающаяся стороны AC и продолжений сторон BA и BC, касается прямой BC в точке Q (вневписанная окружность треугольника ABC). Найдите BQ.

11. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M, а стороны AC — в точке P. Вневписанная окружность касается стороны AC в точке N, а прямой BC — в точке Q. Докажите, что: а) $CP = AN$; б) $MQ = AC$.

12. Угол при вершине A треугольника ABC равен $120°$. Окружность касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что расстояние от вершины A до центра окружности равно периметру треугольника ABC.

13. С помощью циркуля и линейки постройте общие касательные к двум данным окружностям.

Занятие 15. Оценки и неравенства

Задача 1. Сравните числа: а) $\frac{1001}{1002}$ и $\frac{1002}{1003}$; б) $\frac{1}{2013}+\frac{1}{2015}$ и $\frac{2}{2014}$.

Задача 2. Что больше: а) 5^{15} или 15^5; б) 2^{700} или 5^{300}; в) 3^{625} или 7^{375}?

Задача 3. Что больше: а) $100!$ или 10^{100}; б) $100!$ или 90^{100}?

Задача 4. К числу 100 применили операцию факториал 99 раз и получили число A. К числу 99 применили операцию факториал 100 раз и получили число B. Что больше, A или B?

Задача 5. Некоторое положительное число изменили на $0,1$.
а) Мог ли квадрат этого числа измениться более, чем на 10?
б) Мог ли квадратный корень из этого числа измениться более, чем на 10?

Задача 6. Докажите, что $1,01^{100} > 2$.

Задача 7. Сколько цифр в десятичной записи числа 2^{100}?

ВМШ, 8 класс 29.01.2014.

Занятие 15. Оценки и неравенства

Задача 1. Сравните числа: а) $\frac{1001}{1002}$ и $\frac{1002}{1003}$; б) $\frac{1}{2013}+\frac{1}{2015}$ и $\frac{2}{2014}$.

Задача 2. Что больше: а) 5^{15} или 15^5; б) 2^{700} или 5^{300}; в) 3^{625} или 7^{375}?

Задача 3. Что больше: а) $100!$ или 10^{100}; б) $100!$ или 90^{100}?

Задача 4. К числу 100 применили операцию факториал 99 раз и получили число A. К числу 99 применили операцию факториал 100 раз и получили число B. Что больше, A или B?

Задача 5. Некоторое положительное число изменили на $0,1$.
а) Мог ли квадрат этого числа измениться более, чем на 10?
б) Мог ли квадратный корень из этого числа измениться более, чем на 10?

Задача 6. Докажите, что $1,01^{100} > 2$.

Задача 7. Сколько цифр в десятичной записи числа 2^{100}?

ВМШ, 8 класс 29.01.2014.

Занятие 15. Дополнительные задачи

Задача 8. Банк «Блестящий» начисляет 6% от имеющейся на счету суммы раз в год. Банк «Великолепный» начисляет $0,5\%$ раз в месяц. В какой из этих банков Васе нужно положить лежащие в копилке 1000 рублей, чтобы прибыль через 10 лет была больше?

Задача 9. Решите в натуральных числах следующие уравнения:
а) $x+y+z=xyz$; б) $x^2+3x=y^2$; в) $a!+b!+c!+d!=e!$.

Задача 10. Дано квадратное уравнения $x^2+px+q=0$. Его коэффициенты p и q изменили на $0,01$. Мог ли при этом больший корень уравнения измениться более, чем на 100?

Задача 11. Докажите, что: а) $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\cdot 100} < \frac{1}{10}$; б) $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\cdot 100} > \frac{1}{15}$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА.

Основные сведения.

1. Против большей стороны треугольника лежит больший угол. Против большего угла треугольника лежит больший угол.

2. Сумма двух сторон треугольника больше суммы двух других его сторон *(неравенство треугольника)*.

Задачи.

1. Докажите, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.

2. Основание D высоты AD треугольника ABC лежит на стороне BC, причём $\angle BAD > \angle CAD$. Что больше, AB или AC?

3. Сколько можно составить треугольников из отрезков, равных: а) 2, 3, 4; б) 2, 3, 4, 5, 6, 7?

4. а) У равнобедренного треугольника стороны равны 3 и 7. Какая из сторон является основанием?

б) В треугольнике две стороны равны 3,14 и 0,67. Найдите третью сторону, если известно, что её длина является целым числом.

5. Докажите, что наибольший угол треугольника не меньше 60°, а наименьший — не больше 60°.

6. Четыре дома расположены в вершинах четырёхугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырёх домов была наименьшей?

7. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника больше суммы двух его противоположных сторон.

8. Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l. С помощью циркуля и линейки постройте на прямой l такую точку K, для которой сумма $MK + NK$ была бы наименьшей.

9. Точка C лежит внутри прямого угла AOB. Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.

10. Докажите, что если точка M лежит внутри треугольника ABC, то $MB + MC < AB + AC$.

Дополнительные задачи.

11. Докажите, что медиана треугольника, меньше полусуммы, но больше полуразности сторон, между которыми она расположена.

12. Докажите, что сумма трёх медиан треугольника меньше его периметра, но больше трёх четвертей периметра.

13. На сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырёхугольник.

14. В некотором царстве, в некотором государстве есть несколько городов, причём расстояния между ними все попарно различны. В одно прекрасное утро из каждого города вылетает по одному самолёту, который приземляется в ближайшем соседнем городе. Может ли в одном городе приземлиться более пяти самолётов?

Индукция.

Задачи.

1. В кассу выстроилась длинная очередь. У первого покупателя нет дисконтной карты магазина, и за каждым покупателем без дисконтной карты стоит покупатель без дисконтной карты. Тогда у 100-го покупателя в очереди тоже нет дисконтной карты.

2. В установке цветомузыки n разноцветных лампочек. Каждую можно включить или выключить независимо от других. Сколько различных узоров можно получить, включая и выключая лампочки?

3. Докажите, что $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

4. Докажите, что $(7^{2n} - 1) \,\vdots\, 24$.

5. *(Неравенство Бернулли)* Докажите, что $(1 + a)^n \geqslant 1 + an$ при $a > -1$.

6. Докажите, что при каждом натуральном $n > 3$ существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла.

7. Докажите, что а) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. б) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$.

8. Последовательность натуральных чисел a_n начинается с $a_0 = 0$ и $a_n = 3a_{n-1} + 2$.

   Докажите, что $a_n = 3^n - 1$.

9. а) $2^n > 2n + 1$ при натуральных $n > 2$. б) $2^n > n^2$ при натуральных $n > 4$.

10. Докажите, что $(4^n + 15n - 1) \,\vdots\, 9$.

11. Докажите, что квадрат размером $2^n \times 2^n$, из которого вырезали угловую клетку, можно разрезать на уголки из трёх клеток.

Дополнительные задачи.

10. Докажите, что из 2^{n+1} натуральных чисел можно выбрать ровно 2^n, сумма которых делится на 2^n.

11. *(Задача о ханойских башнях)* Имеются три стержня. На первом из них лежит пирамида из n колец, при этом если одно кольцо лежит над другим, то оно меньшего размера. Разрешено перекладывать кольца на другие стержни так, чтобы это свойство сохранялось.

    Докажите, что а) для любого n можно переложить пирамиду с первого стержня на третий. б) Для такого перекладывания достаточно $2^n - 1$ действий и в) за ме́ньшее количество действий переложить нельзя.

12. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке?

13. Докажите, что $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} < \dfrac{1}{\sqrt{3n + 1}}$.

14. На какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n окружностей?

Занятие 18. Индукция — 2

Принцип математической индукции есть свойство (аксиома) множества натуральных чисел, которое мы принимаем без доказательства. Заключается он в следующем. Пусть имеется последовательность утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ Предположим, дополнительно известно, что выполнены следующие условия:

1) утверждение A_1 истинно,

2) при всех k из истинности утверждения A_k следует истинность утверждения A_{k+1}.

Тогда все утверждения A_n истинны.

Проверка первого условия называется *базой индукции*, а проверка второго — *индукционным шагом* или *индукционным переходом.*

Задача 1. а) Докажите, что сумма углов выпуклого шестиугольника равна $720°$.
б) Найдите сумму углов выпуклого n-угольника.

Задача 2. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что можно раскрасить эти части в чёрный и белый цвет таким образом, чтобы соседние части (то есть части, имеющие общий отрезок границы) были разного цвета.

Задача 3. Докажите, что сумма длин звеньев любой ломаной не может быть меньше, чем расстояние между началом ломаной и её концом.

Задача 4. Докажите, что любую сумму денег, начиная с 8 копеек, можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек.

Задача 5. Найдите ошибку в следующем рассуждении.

Докажем при помощи метода математической индукции, что любые n карандашей имеют один и тот же цвет. При $n = 1$ доказывать нечего: карандаш один и цвет у него один. Предположим теперь, что при $n = k$ любые n карандашей имеют один цвет, и докажем это утверждение для $n = k+1$. Рассмотрим произвольный набор из $k+1$ карандаша. Если мы отбросим последний карандаш, то по предположению индукции первые k карандашей будут иметь один цвет. Если же мы отбросим первый карандаш, то по предположению индукции последние k карандашей будут иметь один цвет. Значит, первый и последний карандаш одного цвета — того самого, который имеют второй, третий, ..., k-ый карандаши. Итого, все карандаши одного цвета.

Задача 6. Докажите, что любой из квадратов 2×2, 4×4, 8×8, ..., $2^n \times 2^n$, ..., из которого вырезан угловой квадратик 1×1, можно разрезать на уголки из трёх клеток.

Задача 7. Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: «нале-ВО!» Но по неопытности часть солдат поворачивается налево, а часть — направо. После этого каждую секунду солдаты, оказавшиеся друг к другу лицом, понимают, что произошла ошибка, и оба поворачиваются кругом. Докажите, что, тем не менее, рано или поздно повороты прекратятся (при любом числе солдат и при любом их положении после команды старшины).

Занятие 18. Дополнительные задачи

Задача 8. Докажите, что $|x_1+x_2+\ldots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$ для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Задача 9. Докажите, что при $n > 2$ справедливо неравенство $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{3}{5}$.

Задача 10. Докажите, что $2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ при всех n.

Задача 11. Бизнесмен заключил с чёртом сделку: он может любую имеющуюся у него купюру обменять у чёрта на любой набор купюр любого меньшего достоинства (по своему выбору, без ограничения общей суммы). Бизнесмен может также тратить деньги, но не может получать их в другом месте (кроме как у чёрта). При этом каждый день на еду ему нужен рубль. Сможет ли бизнесмен жить так бесконечно долго?

ВМШ, 8 класс, занятие 19, 26 февраля 2014 г.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СМЕСЬ.

1. С помощью циркуля и линейки проведите через вершину треугольника какую-нибудь прямую, делящую периметр треугольника пополам.

2. Три равные окружности имеют общую точку H, а точки их пересечения, отличные от H, образуют остроугольный треугольник ABC. Докажите, что: а) треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в центрах окружностей; б) H — точка пересечения высот треугольника ABC.

3. Докажите, что если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника,

а) равны, то диагонали четырёхугольника перпендикулярны;

б) перпендикулярны, то диагонали четырёхугольника равны.

4. Сторона AB треугольника ABC больше стороны AC, а $\angle A = 40^\circ$. Точка D лежит на стороне AB, причём $BD = AC$. Точки M и N — середины отрезков BC и AD соответственно. Найдите угол BNM.

5. На прозрачной бумаге дана дуга некоторой окружности. Постройте без всяких инструментов центр этой окружности.

Дополнительные задачи.

6. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на боковых сторонах трапеции как на диаметрах, касаются друг друга.

7. Гипотенуза прямоугольного треугольника служит стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние между вершиной прямого угла треугольника и центром квадрата, если сумма катетов треугольника равна d.

8. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Докажите, что сумма трёх углов, под которыми видна из трёх оставшихся вершин его гипотенуза, равна 90°.

9. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A, и делит этот отрезок пополам.

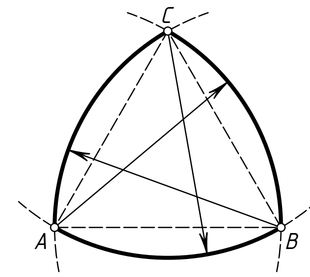
10. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки K и H соответственно, причём $KC = 2KB$ и $HC = HD$. Докажите равенство углов AKB и AKH.

11. Центр описанной окружности треугольника симметричен его центру вписанной окружности относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

ВМШ 8 КЛАСС   ЗАНЯТИЕ 21   5 марта 2014 года

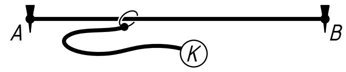
ДАЛЕКО-ДАЛЕКО
НА ЛУГУ ПАСУТСЯ КО...

Коза — точечное, но очень прожорливое существо, способное съесть всю траву, до которой только сможет дотянуться. Поэтому коз держат на привязи.

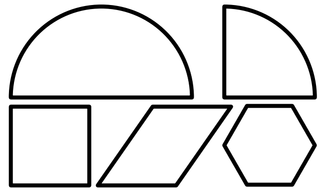


1. Вобьём на лужайке колышек и верёвкой привяжем к нему козу. На каком участке коза съест траву?

2. *Треугольник Рело* — криволинейный треугольник, сторонами которого являются дуги трёх равных окружностей с центрами в вершинах равностороннего треугольника ABC радиусов, равных стороне этого треугольника (см. рис.). Придумайте такую систему колышков и верёвок, чтобы коза съела траву на участке в форме треугольника Рело.

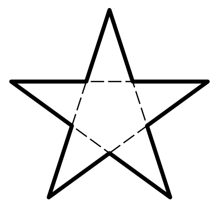


3. Вобьём два колышка в точках A и B. Натянем между ними верёвку. На верёвку AB наденем колечко, которое может по ней скользить. А к колечку верёвкой привяжем козу K. Какую форму будет иметь выеденный участок?



4. Рафаил Калманович прогуливается по лугу, держа козу на поводке длиной 1 м. Путь Рафаила Калмановича проходит по сторонам прямоугольника 3×5 м. Нарисуйте участок, на котором коза съест траву.

5. Придумайте такую систему колышков, колечек и верёвок, чтобы выеденный козой участок имел форму: а) полукруга; б) четверти круга; в) квадрата; г) параллелограмма; д) правильного шестиугольника.

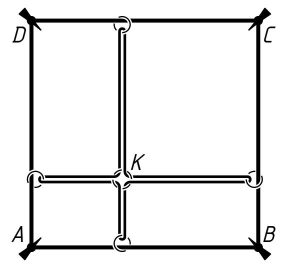


Собака — точечное существо, не пускающее коз в те точки, до которых может само добраться. Чтобы собаки не мешали козам питаться, собак тоже привязывают.

6. К одному и тому же колышку привязаны коза верёвкой длины a и собака верёвкой длины b, $a > b$. На каком участке коза съест траву?

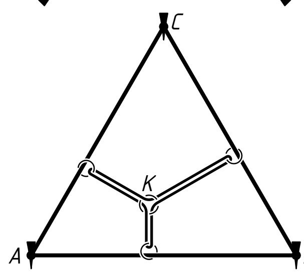
7. При помощи трёх собак на привязи «ограничьте» козу без привязи так, чтобы выеденный ей участок имел форму равностороннего треугольника.

8. При помощи собак «ограничьте» непривязанную козу пятиконечной звездой.



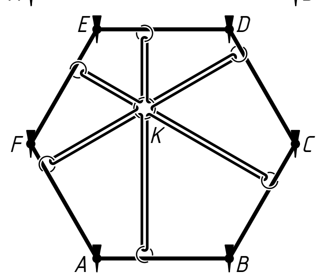
9. а) При помощи одной собаки организуйте выпас четырёх коз, привязанных к одному колышку равными по длине верёвками, так, чтобы козам достались равные участки луга.

б) При помощи пяти собак организуйте выпас четырёх коз без привязи так, чтобы козам достались равные участки луга.

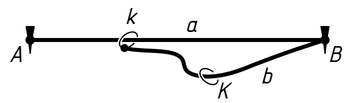


10. а) Колышки вбиты в вершинах квадрата $ABCD$, между ними натянуты верёвки. Через колечко на ошейнике козы и колечки на верёвках AB, BC, CD, DA продета ещё одна верёвка (см. рис.). Какова форма участка, на котором коза съест траву?

б) Колышки вбиты в вершинах равностороннего треугольника ABC, между ними натянуты верёвки. Через колечко на ошейнике козы и колечки на верёвках AB, BC, CA продета ещё одна верёвка (см. рис.). Какова форма участка, на котором коза съест траву?



в) Колышки вбиты в вершинах правильного шестиугольника $ABCDEF$, между ними натянуты верёвки. Через колечко на ошейнике козы и колечки на верёвках AB, BC, CD, DE, EF, FA продета ещё одна верёвка (см. рис.). Какова форма участка, на котором коза съест траву?



11. Колышки вбиты в точках A и B, между ними натянута верёвка длины $AB = a$. На верёвку надето колечко k. Вторая верёвка длины $b \leqslant a$ привязана одним концом к колышку B, а вторым — к колечку k. Колечко на ошейнике козы K надето на вторую верёвку (см. рис.). На каком участке коза съест траву?