

- I.1. Некоторые из присутствующих в этой аудитории знакомы между собой. Доказать, что по крайней мере двое из нас знакомы с одинаковым числом людей, находящихся здесь.
- I.2. Можно ли нарисовать схему соединения 9 телефонов между собой так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с тремя другими.
- I.3. Доказать, что в любом выпуклом четырёхугольнике середины его сторон лежат в вершинах параллелограмма.
- I.4. Двое играют в такую игру: имеется куча из 100 конфет, из которых 99 карамелек и одна Бабаевская шоколадка. Ходят по очереди. Ход состоит в том, что играющий съедает любое количество конфет от 1 до 10, причём шоколадку можно съесть только последней. Выигрывает съевший шоколадку. Кто выиграет при правильной игре: первый или второй?
- I.5. Те же правила, что и в задаче I.4., но едят кучу из 100 камней, из которых 99 маленьких и один кирпич. Проигрывает съевший кирпич. Кто выиграет при правильной игре?
- I.6. Из шахматной доски 8×8 левая нижняя и правая верхняя клетки вырезаны. Можно ли оставшиеся 62 клетки покрыть 31 костяшкой домино, если каждая доминошка покрывает ровно две клетки доски?
- I.7. Найдите последнюю цифру числа 7^{100} и числа 7^{1977} .
- I.8. Найдите последнюю цифру числа $7^{(7^{100})}$.

Имея в двух карманах три монеты,
в одном из них найдёшь не меньше двух.
(Народная мудрость)

- 2.1. У человека на голове не больше 150 000 волос. Доказать, что в Москве живут хотя бы 40 человек с одинаковым числом волос.
- 2.2. На плоскости даны 25 точек. Известно, что из любых трёх точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Доказать, что среди данных точек найдутся 13, лежащие в круге радиуса 1.
- 2.3. Доказать, что из 100 различных целых чисел можно выбрать два, разность которых делится на 99.
- 2.4. Доказать, что из 100 различных натуральных чисел можно выбрать одно или несколько так, чтобы их сумма делилась на 100.
- 2.5. В прямоугольнике площадью 5 см^2 расположены 9 прямоугольников, площадь каждого из них 1 см^2 . Доказать, что площадь общей части каких-либо двух прямоугольников не меньше $1/9$.
- 2.6. Даны две окружности, длина каждой равна 81077 см . На одной из них отмечено 81077 точек, а на другой — несколько дуг, сумма длин которых меньше 1 см. Доказать, что эти окружности можно так наложить друг на друга, что ни одна отмеченная точка не попадёт ни на одну из отмеченных дуг.
- 2.7. Из чисел 1, 2, ..., 200 произвольно выбрали 101 число. Доказать, что среди выбранных чисел всегда найдутся два таких, что одно из них делится на другое.
- 2.8. В первенстве по футболу участвуют 30 команд. Каждая две команды должны сыграть между собой один матч. Доказать, что в любой момент соревнований имеются две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

- 3.1. В чемпионате по футболу участвуют 30 команд. Сколько игр необходимо сыграть, если каждая команда играет с каждой ровно один раз?
- 3.2. Сколько игр необходимо сыграть, чтобы в турнире выявить победителя, если имеется 40 участников, а сильнейший всегда выигрывает?
- 3.3. Дан угол и точка внутри него. Провести через эту точку прямую так, чтобы её отрезок, отсекаемый сторонами угла, делился точкой пополам.
- 3.4. 300 человек выстроились в прямоугольник 30×10 (по 30 человек в шеренге и по 10 в каждой колонне). Из каждой шеренги выбрали самого высокого; самым низким из них оказался Петров. Затем из каждой колонны выбрали самого низкого; самым высоким из них оказался Иванов. Кто выше: Иванов или Петров?
- 3.5. Даны два целых числа. Известно, что сумма их квадратов делится на 3. Доказать, что каждое из чисел делится на 3.
- 3.6. Даны два целых числа. Известно, что сумма их квадратов делится на 7. Доказать, что и сами числа кратны 7.
- 3.7. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске, чтобы они не били друг друга?

- 4.1. Какое наибольшее число королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы никакие два короля не били друг друга?
- 4.2. Замените в формулировке задачи 4.1. королей на слонов.
- 4.3. Какое наименьшее число ладей нужно расставить на шахматной доске так, чтобы все поля были "битыми"? Сколькими способами это можно сделать?
- 4.4. Из шахматной доски вырезали левую нижнюю клетку. Можно ли оставшиеся 63 клетки разрезать на 21 полосу 1×3 клетки?
- 4.5. Правила игры: на шахматной доске в левом нижнем углу стоит белая, а в правом верхнем — чёрная королевская ладья, которые ходят как лады, но только на соседнее поле. Ходят по очереди, белые начинают. Нужно съесть ладью противника.
- а) Могут ли белые выиграть при плохой игре чёрных?
 - б) Могут ли чёрные выиграть при правильной игре белых?
- 4.6. Правила игры: на шахматную доску по очереди ставятся белые и чёрные кони, причём разноцветные кони не могут бить друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. Кто выигрывает при правильной игре, белые или чёрные?
- 4.7. В "двойных шахматах" противники делают не по одному ходу (как в обычных), а по два. Доказать, что чёрные не могут выиграть при правильной игре белых (в обычных шахматах пока это неизвестно).

- 5.1. Ленивый людоед всегда идёт по кратчайшему пути. Добычу он ест на месте и возвращается домой, обязательно напившись по дороге у реки. Охотится он только на своём берегу, так как на другом берегу живёт другой людоед. Как ленивый людоед выбирает себе путь, если у него есть карта, на которой река выглядит как прямая полоса?
- 5.2. Изредка ленивый людоед ходит в гости к соседу. Плавает он плохо, поэтому реку переплывает строго перпендикулярно берегам. Укажите маршрут людоеда.
- 5.3. Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограммы?
- 5.4. Многоугольник после поворота вокруг точки O на угол $24,5^\circ$ совпал со своим прежним положением. Какое наименьшее число сторон он мог иметь?
- 5.5. Доказать, что сумма длин медиан треугольника всегда меньше его периметра.
- 5.6. В треугольнике длина каждой высоты меньше 1 см. Доказать, что площадь треугольника меньше 1 см^2 .
- 5.7. Может ли замкнутая ломаная линия, состоящая из 101 звена пересекать каждое своё звено ровно по одному разу?

- 6.1. Двое играют в игру: первый задумывает число от 1 до 1000, а второй отгадывает его, задавая первому вопросы, на которые можно отвечать только "ДА" или "НЕТ". Доказать, что второй может угадать любое число за десять вопросов.
- 6.2. Доказать, что за 9 вопросов не всегда второй может угадать.
- 6.3. Из восьмидесяти золотых монет одна фальшивая — легче остальных по весу. Есть двухчашечные весы без гирь (как в аптеке). Сколько необходимо сделать взвешиваний, чтобы обнаружить фальшивую монету?
- 6.4. (Трудная). Из 12 монет одна фальшивая. Неизвестно, тяжелее она настоящих или легче. За три взвешивания на чашечных весах найти фальшивую монету.
- 6.5. Золотая цепочка состоит из 21 звена, каждое звено стоит рубль. Какие два звена цепочки нужно распилить, чтобы можно было оплатить любую покупку, стоящую целое число рублей от 1 до 21? (Распиленное звено стоит тоже рубль).
- 6.6. Какую наибольшую длину может иметь золотая цепочка, чтобы распилив три звена, можно было оплатить покупку, стоимостью от рубля до цены всей цепочки?
- 6.7. Некоторые из 20 металлических кубиков, одинаковых по внешнему виду, — алюминиевые, остальные — дюралевые (более тяжёлые). Как при помощи чашечных весов не более, чем за 11 взвешиваний определить число дюралевых кубиков?

Как сделать?

Советы преподавателям. Не стоит сразу все задачи писать на доске, лучше давать их по мере решения уже имеющихся. В некоторых задачах (1,2,6) можно также просить доказать, что предложенный способ — наилучший. Задача 6 — трудная, задача 7 с подвохом (выход в пространство)

1. Как быстрее всего поджарить с двух сторон три гренка на сковородке, вмещающей только два гренка (каждая сторона должна жариться минуту)?

2. Имеется кастрюлька, вмещающая 4 яйца. Нужно сварить 4 крутых яйца (варятся 4 минуты) и 2 яйца всмятку (варятся 2 минуты). Как сделать это быстрее всего?

3. Как от куска шнура в $\frac{2}{3}$ метра отрезать полметра, не имея метра?

4. Можно ли число 203 представить в виде суммы нескольких слагаемых, произведение которых также равно 203?

5. Из восьмилитрового ведра, наполненного молоком, надо отлить 4 литра в пустой пятилитровый бидон с помощью пустого трехлитрового бидона. Как это сделать?

6. Имеется 5 одинаковых с виду камней разного веса. Как расположить их в порядке убывания весов, сделав не более 7 взвешиваний на чашечных весах без гирь?

7. Расположить 6 одинаковых спичек так, чтобы образовалось четыре правильных треугольника.