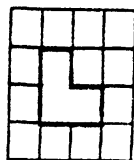


Математический кружок для 7 класса.

Занятие 1 (5 октября 94г.)

1. Что больше: 5% от 7 миллионов или 7% от 5 миллионов?
2. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, (а) на две; (б) на три; (в) на четыре равные части.
3. Четырехзначное число 12?? делится на 90. Найти две его последние цифры.



4. Тот же вопрос, если оно делится на 91.
5. Что больше: $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{300 \text{ раз}}$ или $\underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{200 \text{ раз}}$?

6. Из Москвы в Петербург вышел товарный поезд, одновременно из Петербурга в Москву вышел скорый поезд. Дойдя до места назначения, поезда мгновенно разворачиваются и едут назад с прежней скоростью, затем (дойдя до пункта отправления) снова поворачиваются и так далее. Первый раз поезда встретились через 5 часов после начала движения. Когда они встретятся в четвертый раз? Скорости поездов постоянны (у каждого — своя).

ВЕЧЕРНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЗАНЯТИЕ 2

Задача 1. Картошка весит 100 кг. и в ней 99% воды. Она высохла и в ней стало 98% воды. Сколько она стала весить?

Задача 2. Какую цифру надо подставить вместо * в четырехзначном числе 777*, чтобы получилось число, делящееся на 6?

Задача 3. Длина ребра куба полметра. Куб разрезали на маленькие кубики с ребром длиной в 2 миллиметра. После этого все кубики уложили в один сплошной ряд. Чему равна длина этого ряда?

Задача 4. Четыре страны имеют форму треугольника. Нарисуйте, как расположены страны друг относительно друга, если известно, что каждая из стран имеет с любой другой общую границу (состоящую более, чем из одной точки).

Задача 5. Давным-давно девять одинаковых книг стоили 11 рублей с копейками, а тринадцать таких же книг стоили 15 рублей с копейками. Сколько стоила одна книга? (Один рубль составлял ровно 100 копеек)

Задача 6. Расстояние между деревнями А и В равно 3 км. В деревне А живут 100 школьников, а в деревне В – 50 школьников. На каком расстоянии от деревни А нужно построить школу, чтобы общее расстояние, проходимое всеми 150 школьниками, было наименьшим?

Задача 7. В мешке лежало менее 1000 яблок. Некто взял две корзины и стал раскладывать яблоки в корзины поровну. В конце осталось одно яблоко. Тогда некто ссыпал яблоки обратно в мешок и принес третью корзину. Этот некто стал раскладывать яблоки в корзины и у него снова осталось одно яблоко. Та же история повторилась, когда некто раскладывал яблоки в 4 корзины, в 5, 6, 7 корзин. Сколько же было яблок в мешке?

ВЕЧЕРНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЗАНЯТИЕ 3

19 ОКТЯБРЯ 1994 ГОДА

ТЕМА: Четность

Задача 1. Когда-то давно использовались купюры достоинством 1, 3, 5, 25 рублей (и другие). Можно ли было разменять 25 рублей десятью купюрами по 1, 3 и 5 рублей.

Задача 2. Существует ли замкнутая ломаная, состоящая

- а) из 6 звеньев
- б) из 7 звеньев

каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев.

Задача 3. Имеется 10 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 5 или на 7 частей. Все полученные части смешали и некоторые из них снова разрезали на 5 или на 7 частей и так далее. Может ли после нескольких таких операций получиться 1995 кусков?

Задача 4. Костяшки домино выложили в цепь. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков на другом конце?

Задача 5. Можно ли 15 телефонов соединить проводами так, чтобы каждый аппарат был соединен с тремя другими?

Задача 6. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 1994$. Разрешается стереть с доски любые два числа и написать их разность (из большего вычитается меньшее). В конце концов на доске останется одно число. Может ли это число равняться нулю?

Дополнительные задачи

Задача 7. В турнире по олимпийской системе участвуют 1000000 человек. Сколько партий будет сыграно на этом турнире?

Задача 8. Имеется 6 утверждений:

- а) ни одна рыба не уверена в своем вооружении, если не имеет трех рядов зубов
- б) ни одна акула не сомневается в своем вооружении
- в) рыба, не умеющая танцевать кадрили, заслуживает сострадания
- г) все рыбы, кроме акул, ласковы с детьми
- д) тяжелые рыбы не умеют танцевать кадрили
- е) рыба, имеющая три ряда зубов, не заслуживает сострадания.

Следует ли из них утверждение: тяжелая рыба ласкова с детьми.

ВЕЧЕРНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЗАНЯТИЕ 4

28 ОКТЯБРЯ 1994 ГОДА

ТЕМА: ЧЕТНОСТЬ

Задача 1. Можно ли доску размером 57×57 выложить доминошками 1×2 ?

Задача 2. На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно главной диагонали. Докажите, что хотя бы одна шашка расположена на главной диагонали.

Задача 3. Дана квадратная таблица 4×4 , в каждой клетке которой стоит "+" или "-" (см. рис). За один ход можно поменять все знаки в любой строке или любом столбце на противоположные. Можно ли за несколько ходов получить таблицу из одних плюсов?

а) $\begin{array}{cccc} + & - & - & + \\ - & + & + & - \\ - & + & + & - \\ + & - & - & + \end{array}$

б) $\begin{array}{cccc} + & + & + & - \\ + & + & + & + \\ - & - & + & + \\ + & + & + & + \end{array}$

в) $\begin{array}{cccc} - & + & + & - \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ - & + & + & - \end{array}$

Задача 4. Можно ли шахматную доску размером 8×8 с вырезанными углами $a1$ и $b8$ выложить костяшками домино 1×2 ?

Задача 5. Кузнечик прыгает по прямой - каждый раз на один метр вправо или влево. Через некоторое время он оказался в начальной точке. Докажите, что он сделал четное число шагов.

Задача 6. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая на 90° . Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет лишь за целое число часов.

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 7. Как от куска веревки длиной в $\frac{2}{3}$ метра отрезать полметра, не имея под рукой линейки?

Задача 8. Имеются две кучки камней - по 11 в каждой. За ход разрешается взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 9. (Логическая задача) Число x натуральное. Из утверждений $2x > 70$, $x < 100$, $3x > 25$, $x \geq 10$, $x > 5$ два верных и три неверных. Чему равно x ?

Задача 10. (Логическая задача) Предположим, что истинны следующие утверждения:

а) среди людей имеющих телевизоры, есть такие, кто не является малярами.

б) люди, каждый день купающиеся бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли из них утверждение: не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Задача 11. Можно ли из 18 доминошек размером 1×2 выложить квадрат 6×6 так, чтобы при этом не было ни одного прямого "шва", соединяющего противоположные стороны доски и идущего по краям доминошек?

ВЕЧЕРНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЗАНЯТИЕ 5

2 НОЯБРЯ 1994 ГОДА

Задача 1. Имеется двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Яйцо варится 15 минут. Как отмерить время при помощи песочных часов?

Задача 2. У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько в этой семье сестер и братьев?

Задача 3. Вычислите сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.

Задача 4. Нарисуйте ломаную из четырех звеньев, проходящую через все 9 точек, изображенных на рисунке:



Задача 5. Число учеников в Вашем школьном классе умножьте на 4, к результату прибавьте 7, полученное число умножьте на 25, прибавьте к полученному произведению 125 и число Вашего дня рождения. Скажите преподавателю, что у Вас получилось, и он тут же назовет количество учеников в Вашем классе и число Вашего дня рождения. Как он все это узнает?

Задача 6. Три мальчика Алеша, Вася и Семен на классном чаепитии устроили соревнование – кто больше съест пирожных. За ними наблюдал весь класс. Перед началом один зритель сказал, что первым будет Алеша, другой – что Семен не будет последним, а третий – что Вася не будет первым. После соревнования оказалось, что один зритель угадал, а два других ошиблись. Как распределились места, если известно, что мальчики съели различное число пирожных?

Задача 7. На полоске размером 1×10 клеток на первой клетке стоит фишка. Маша и Ира по очереди передвигают фишку не более, чем на три клетки вперед. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 8. Можно ли доску 10×10 клеток покрыть 4-х клеточными фигурами вида



Дополнительная задача

Задача 9. В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на две части (по 50 коров в каждой) так, что суммарный вес коров первой части равен суммарному весу коров другой части. Известно, что каждая корова весит целое число килограммов. Докажите, что все коровы весят одинаково.

1994 Г.

57 ШКОЛА 7 КЛАСС

ЗАНЯТИЕ 6

16 НОЯБРЯ

ТЕМА: ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

- Задача 0. В лифте едут 4 человека и нажато три кнопки. Докажите, что все пассажиры не могут ехать на разные этажи. Объясните, что произойдет, если едут 4 человека и нажато 5 кнопок ?
- Задача 1. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой елке не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.
- Задача 2. В классе 25 учеников. Докажите, что в этом классе найдутся 2 ученика, которые отмечают свой день рождения в одном и том же месяце. А найдутся ли 3 таких ученика?
- Задача 3. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.
- Задача 4. Докажите, что в любой компании из пяти человек есть по крайней мере двое, имеющие одинаковое число (может быть равное нулю) знакомых. А в компании из 100 человек ?
- Задача 5. В первенстве по футболу участвуют 10 команд. Каждые две из них должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей.

-----РАЗНОЕ-----

- Задача 6. Можно ли расположить на плоскости 6 точек и соединить их отрезками так, чтобы каждая точка была соединена ровно
а) с тремя б) с четырьмя точками.
- Задача 7. Логическая задача. В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. "Замечательно, что один из нас блондин, другой - брюнет, а третий - рыжий, и при этом ни у одного из нас цвет волос не соответствует фамилии", - заметил черноволосый. "Ты прав", - сказал Белов. Определите цвет волос художника.
- Задача 8. Можно ли равносторонний треугольник покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками ?

57 ШКОЛА. 7 КЛАСС.

ЗАНЯТИЕ 7
ТЕМА: РАЗНОЕ

23 НОЯБРЯ 1994г.

Задача 1. Дрожжевые грибки при благоприятных условиях размножаются с большой скоростью, увеличиваясь в объеме в два раза за каждую минуту. В колбу поместили один гриб, который заполнил ее за 30 минут. За сколько минут заполнят колбу помещенные в нее два гриба?

Задача 2. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков больше цифры единиц?

Задача 3. Влажность свежескошенной травы 60%, влажность сена 15%. Сколько сена получится из одной тонны свежескошенной травы?

Задача 4. В одном стакане было молоко, а в другом — столько же чая. Из стакана молока перелили одну ложку в стакан с чаем. Затем такую же ложку смеси перелили обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане молоком или молока в стакане с чаем?

Задача 5. Летит над лесом стая сороконожек и трехголовых драконов. У них всего 26 голов и 298 ног. У каждой сороконожки одна голова. Сколько ног у трехголового дракона?

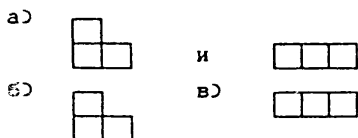
Задача 6. Замок кардинала Ришелье имеет вид прямоугольника размером 7×9 клеток. Каждая клетка, кроме центральной, — комната замка, а в центральной находится бассейн. В каждой стене (стороне клетки), разделяющей соседние комнаты, проделана дверь. Можно ли, не выходя из замка и не заходя в бассейн, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?

Задача 7. Числа от 1 до 10 записаны в строчку в произвольном порядке. Каждое из них сложим с номером места, на котором оно стоит. Докажите, что хотя бы две суммы оканчиваются одной цифрой.

ТЕМА: РАСКРАСКИ

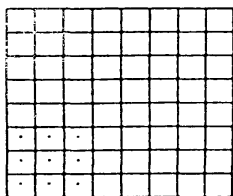
Некоторые из предложенных ниже задача про клетчатую доску легко решаются, если удачным образом раскрасить доску в несколько цветов.

Задача 1. Можно ли покрыть шахматную доску 8×8 с вырезанной угловой клеткой фигурками вида:



Задача 2. Можно ли доску 10×10 покрыть фигурками 1×4 так, чтобы фигурки не перекрывались и не вылезали за пределы доски?

Задача 3. На доске 8×8 в левом нижнем углу в виде квадрата 3×3 лежат девять фишек (см. рисунок). За один ход разрешается какой-нибудь одной фишке перепрыгнуть через какую-нибудь (не обязательно соседнюю) фишку на клетку, симметричную первой фишке относительно второй (если эта клетка свободна). Можно ли после



нескольких таких ходов собрать все фишки в виде квадрата 3×3

а) в левом верхнем углу доски;

б) в правом верхнем углу доски?

Задача 4. На каждой клетке доски размером а) 8×8 б) 9×9 сидело по жуку. Затем каждый жук переполз на одну из соседних к нему клеток. Докажите, что после этого хотя бы одна из клеток стала пустой. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону)

РАЗНОЕ

Задача 5. Ира, Таня, Коля и Андрей собирали грибы. Таня собрала больше всех, Ира – не меньше всех. Верно ли, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики?

Задача 6. Все натуральные числа записаны в порядке возрастания:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 Какая цифра в этой записи стоит на

а) сотом б) тысячном месте?

ТЕМА: КОМБИНАТОРИКА

Задача 1. В стране чудес есть три города A, B, V . Из города A в город B ведет 6 дорог, а из города B в город V – 4 дороги. Сколькими способами можно проехать из города A в город V ?

Задача 2. Назовем натуральное число симпатичным, если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует четырехзначных симпатичных чисел?

Задача 3. В магазине "Все для чая" есть 5 разных чашек, 3 разных блюдца и 4 разные чайные чашки. Сколькими способами можно купить
а) чашку с блюдцем? б) комплект из чашки, блюдца и ложки?
в) два предмета с разными названиями?

Сколькими способами можно разложить 10 одинаковых кусков сахара по
г) двум разным чашкам? д) трем разным чашкам?

Задача 4. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

Задача 5. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв A, B и V . Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

РАЗНОЕ

Задача 6. Карлсон может съесть банку варенья за 5 минут, Малыш – за час, а Фрекен Бок – за полчаса. За какое время они съедят эту банку вместе?

Задача 7. Стальную плитку размерами 73×19 см обвели карандашом на бумаге. Найдите центр (точку пересечения диагоналей) полученного прямоугольника, имея в распоряжении только эту плитку и карандаш.

Задача 8. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что
а) найдутся на плоскости две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1994 м;
б) найдутся на плоскости две точки разного цвета, расстояние между которыми равно 1994 м.

ТЕМА: КОМБИНАТОРИКА

Задача 1. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей "орлов" и "решек" может получиться?

Задача 2. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать из них капитана и его заместителя?

Задача 3. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Задача 4. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове а) ТОЧКА; б) ЛИНИЯ; в) ПОТОП; г) МАТЕМАТИКА?

Задача 5. Каждую грань куба нужно окрасить в один из шести различных цветов, причем разные грани – в разные цвета. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 6. Сколькими способами можно разделить 25 одинаковых конфет между четырьмя школьниками? Два способа считаются разными, если при них хотя бы у одного школьника разное число конфет.

РАЗНОЕ

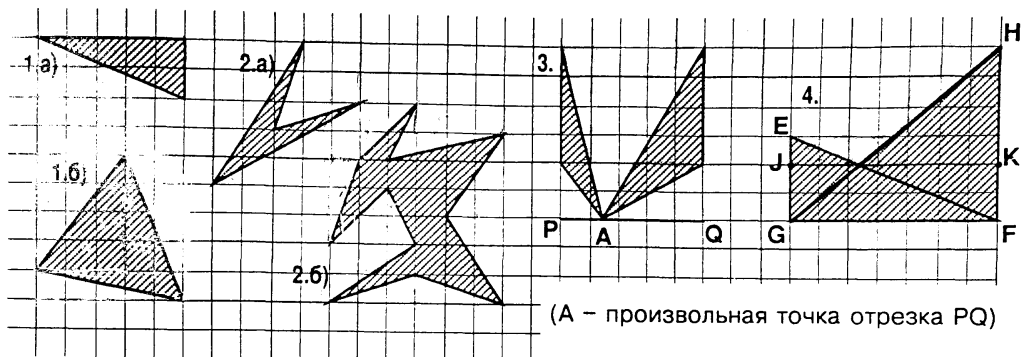
Задача 7. То да это да половина того да этого – сколько это будет процентов от трех четвертей того да этого?

Задача 8. Навстречу друг другу едут два поезда. Скорость каждого из них – 50 км/ч. Когда расстояние между поездами было 200 км, с одного из них взлетела муха и полетела к другому поезду; долетев, повернула обратно, долетела до первого, опять повернула и т.д. Какое расстояние пролетит муха к моменту встречи поездов, если она летит со скоростью 60 км/ч?

Задача 9. Сколько клеток пересекает диагональ в клетчатом прямоугольнике размером 19×97 ?

ТЕМА: РАЗНОЕ

В задачах 1а), 1б), 2а), 2б), 3 и 4 найдите площади изображенных фигур, если площадь каждой клеточки равна 1. Подсказка: если фигуру разбить на части, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.



Задача 5. Даны несколько кирпичей и линейка. Как измерить диагональ кирпича?

Задача 6. Чему равна дробь

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21}{1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 12 \cdot 20 + 7 \cdot 21 \cdot 35}$$

Задача 7. В противоположных (наиболее удаленных друг от друга) вершинах куба сидят паук и муха. Каким кратчайшим путем паук может доползти до мухи? Объясните ответ.

Задача 8. Самолет летит из Уфы в Ялту и возвращается обратно в Уфу. В какую погоду он проделает весь путь быстрее: в безветренную, или при одном и том же ветре, дующем в направлении Ялта-Уфа?

ТЕМА: ВЗВЕШИВАНИЯ

Задача 1. Есть 9 монет, из которых одна фальшивая, причем она легче настоящих. За два взвешивания на чашечных весах без гирь определите фальшивую монету.

Задача 2. Есть шесть монет, из которых две фальшивые, легче настоящих. За три взвешивания на чашечных весах без гирь определите обе фальшивые монеты.

Задача 3. Есть десять мешков монет, один из которых целиком заполнен фальшивыми монетами, которые на 1 грамм легче настоящих. За одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, определите фальшивый мешок.

Задача 4. Есть десять мешков, некоторые из которых целиком заполнены фальшивыми монетами, а все остальные – настоящими. Фальшивая монета на один грамм легче настоящей. Про один из мешков точно известно, что он наполнен настоящими монетами. За одно взвешивание на весах со стрелкой определите все фальшивые мешки.

Задача 5. Имеются 12 монет, среди которых одна – фальшивая, но неизвестно, легче она или тяжелее настоящей. Имеются также весы с двумя чашками без гирь. Найдите фальшивую монету

а) за четыре взвешивания б) * за три взвешивания

РАЗНОЕ

Задача 6. Пете позавчера было 10 лет, а в следующем году будет 13. Может ли так быть?

Задача 7. Вычислите суммы: а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}$ б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$;
в) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5}$;
г) * $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$

Задача 8. Несколько разбойников хотят поделить добычу. Каждый уверен, что он поделил бы добычу на равные части, но остальные ему не доверяют. Придумайте, как должны действовать разбойники, чтобы после раздела каждый из них был уверен, что он получил не меньше любого из остальных. Разберите случаи, когда разбойников

а) двое; б) трое; в) четверо; г) * n , где n – произвольное натуральное число.

ОЛИМПИАДА

Задача 1. Сумма 1994-х целых чисел нечетна. Какое из следующих трех утверждений является верным:

- 1) произведение этих чисел-четно 2) произведение этих чисел-нечетно
3) про четность произведения этих чисел ничего нельзя сказать. /Ответ обосновать/

Задача 2. Может ли конь на шахматной доске, начав с поля $a1$, закончить на поле $h8$, побывав при этом в каждой клетке доски ровно один раз ?

Задача 3. В коробке синие, красные и зеленые карандаши - всего 20 штук. Синих карандашей в шесть раз больше, чем зеленых. Красных меньше, чем синих. Сколько красных карандашей в коробке ?

Задача 4. Вычислите произведение

$$(196 - 1^2) \cdot (196 - 2^2) \cdot (196 - 3^2) \cdot \dots \cdot (196 - 25^2)$$

Задача 5. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы слова "КОЛОБОК" ?

Задача 6. В таблице 10×10 по порядку расставлены числа от 0 до 99 (в первой строке - от 0 до 9, во второй строке - от 10 до 19 и т.д.). Затем перед каждым из чисел поставлен знак "+" или "-" так, что в каждой строке и в каждом столбце оказалось по пять знаков "+" и пять знаков "-". Чему может быть равна сумма всех чисел таблицы с учетом расставленных знаков ?

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Задача 7. Известно, что число $a + \frac{1}{a}$ - целое. Докажите, что число

$$a^2 + \frac{1}{a^2} - \text{тоже целое}$$

ТЕМА: РАЗНОЕ

Задача 1. В некотором месяце три воскресенья пришлись на четные числа. Какой день недели был 20 числа этого месяца ?

Задача 2. Пол комнаты площадью 12 м^2 покрыт тремя коврами: площадь одного ковра 5 м^2 , другого – 4 м^2 и третьего – 3 м^2 . Каждый два ковра перекрываются на площади $1,5 \text{ м}^2$, причем $0,5 \text{ м}^2$ из этих полутора квадратных метров приходится на участок пола, где перекрываются все три ковра.

а) Какова площадь пола, не покрытая коврами ?

б) Какова площадь участка, покрытого одним только первым ковром ?

Задача 3. Расшифруйте следующий текст:

Мяжя Дяма клѣнгѣ брящѣд,

Юлѣмыря ф лѣшгю нашгѣ.

Дыжѣ, Дямѣшгя, мѣ брящѣ,

Мѣ юдѣмѣд ф лѣшгѣ наш.

Известно, что он зашифрован следующим образом.

Гласные буквы: а, е, ё, и, о, у, ы, э, ю, я (й – выброшена!) как-то разбиты на пары. Остальные двадцать две буквы тоже как-то разбиты на пары. Каждая буква в тексте заменена на другую букву из той же пары.

Задача 4. В квадрате $ABCD$ расположено несколько окружностей, сумма радиусов которых равна $0,6 \text{ м}$. (Окружности могут пересекаться или совпадать). Докажите, что найдется прямая, параллельная AB , имеющая общие точки по крайней мере с двумя окружностями.

Задача 5. С помощью циркуля и линейки разделите данный угол в 19° на 19 равных частей.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 6. Продавец взвешивает яблоки на неравноплечих рычажных весах. Покупатель купил 1 кг яблок, а затем еще 1 кг, попросив продавца поменять местами при втором взвешивании гирю и яблоки. Кто понес убытки – покупатель или продавец ?

Задача 7. Расшифруйте следующий текст: (Принцип шифровки тот же, что и в задаче 3, но вместо буквы "й" удалена буква "ѣ")

"Берпи э йдемгоквзы бибео-жакйпч звеле, – эбисив Фивмиу-Кевмиу пелевчже дгосгановчже, – еже есжиьном мевчбе ме, ьме э цей, ьмекю еже екесжиьиве, – жа кевчфо, жа тожчфо".

ТЕМА: ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Задача 1. /На вид простая и скучная, но очень полезная/ Найдите остатки от деления : а) 12 на 5, 12^2 на 5, 12^3 на 5; б) 95 на 4, 995 на 4, 1995 на 4.

Задача 2. а) Некоторое число делится на 2 и на 3. Обязательно ли оно делится на 6 ?

б) Некоторое число делится на 4 и на 6. Обязательно ли оно делится на 24 ?

Задача 3. Докажите, что произведение любых

а) двух б) трех в) пяти последовательных чисел делится соответственно на а) 2 б) 6 в) 120.

Задача 4. Пусть числа p и q простые. Сколько делителей у числа

а) pq б) p^2q в) p^2q^2 г) p^nq^m , n и m — натуральные числа.

Задача 5. Докажите, что следующие числа делятся на 6:

$$\text{а) } n^3 - n ; \quad \text{б) } n^3 + 5n .$$

Задача 6. На какую цифру оканчивается число 2^{1995} ?

Задача 7. Найдите два таких последовательных натуральных числа, чтобы сумма цифр каждого делилась на 7.

Задача 8. Докажите, что из любых 15 целых чисел можно выбрать два, разность которых делится на 14.

Задача 9. В классе 20 человек. Для успешного решения задач на контрольной работе ученики разбиваются на пары и решают каждую задачу вдвоем. Сколькими способами они могут это сделать ?

Задача 10. Через точку пересечения биссектрис AD и CE треугольника ABC проведена прямая, параллельная основанию AC и пересекающая боковые стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN = AM + CN$.

ТЕМА: ДЕЛИМОСТЬ (продолжение)

При решении задач можно использовать следующее правило нахождения остатка от деления на некоторое натуральное число n суммы $a + b$ или произведения ab целых чисел a и b .

Надо найти остатки от деления на n самих чисел a и b , сложить эти остатки, а затем найти остаток у полученной суммы. Аналогично поступают и с произведением.

Замечание. Все числа в задачах этого занятия – целые.

Задача 1. а) Дробь $\frac{a}{b}$ сократима. Сократима ли дробь $\frac{a-b}{a+b}$?

б) Дробь $\frac{a-b}{a+b}$ сократима. Сократима ли дробь $\frac{a}{b}$?

Задача 2. Докажите, что число $222^{555} + 555^{222}$ делится на 7.

Задача 3. Докажите, что $a^2 + b^2$ делится на 3 тогда и только тогда, когда a и b делятся на 3.

Задача 4. Пусть a и b – цифры. Докажите, что если $a + b$ делится на 7, то число $\overline{aba}$ тоже делится на 7.

Задача 5. Пусть a и b – цифры. Докажите, что число $\overline{abcabc}$ не может быть квадратом целого числа.

Задача 6. а) Докажите, что число $111\dots 111$, состоящее из 81 единицы, делится на 81.

б) Верен ли признак делимости на 81: если сумма цифр числа делится на 81, то и число делится на 81 ?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 7. Докажите, что среди чисел, цифры которых только 0 и 1, можно найти, делящееся на 1995.

Задача 8. Найдите все такие простые числа p , что числа $p+10$ и $p+14$ тоже простые.

Задача 10. На сторонах AC и CB треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ACPQ$ и $BCMN$. Докажите, что

а) отрезки BP и AM равны и перпендикулярны;

б) если O_1 и O_2 – центры этих квадратов, а K – середина стороны AB , то отрезки O_1K и O_2K равны и перпендикулярны.

ТЕМА: РАЗНОЕ

Задача 1. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы без стрелки, отмерить 9 кг гвоздей?

Задача 2. В ряд выписаны 105 единиц. Сначала перед каждой единицей (кроме первой) стоит знак "+". Затем перед каждой третьей единицей знак "+" заменяют на знак "-", затем заменяют знак на противоположный перед каждой пятой единицей, затем – перед каждой седьмой единицей. Найдите значение полученного выражения.

Задача 3. Витя, Сережа, Костя и Юра распилили двуручной пилой три бревна (каждое – на три чурки). При этом Витя отпилил две чурки, Сережа – три, а Костя – четыре. Сколько чурок отпилил Юра?

Задача 4. Можно ли покрыть всю плоскость квадратами, среди которых всего два одинаковых? (Квадраты не должны перекрываться).

Задача 5. Из листа картона вырезали несколько равносторонних треугольников. В вершинах каждого написали цифры 1, 2 и 3, а затем эти треугольники сложили в стопку. Может ли быть так, чтобы сумма чисел вдоль каждого ребра стопки (по вертикали) была равна
а) 55 ? б) 50 ?

Задача 6. Найдите все такие целые числа x и y , что $xy = x + y$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 7. Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть 1 или остальных?

Задача 8. В клетках шахматной доски расставлены натуральные числа от 1 до 64, причем каждое число встречается ровно один раз. Докажите, что найдутся две соседние клетки, числа в которых отличаются не менее, чем на 5.

Задача 9. Докажите, что если в треугольнике биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины, совпадают, то такой треугольник равнобедренный.

ТЕМА: ПРИНЦИП КРАЙНЕГО

Решения этих задач начинаются словами: "выберем самое маленькое, ..., рассмотрим самое удаленное..."

Задача 1. В вершинах куба расставлены числа 1, 2, 3, ..., 8. Докажите, что есть ребро, цифры на концах которого отличаются не менее, чем на 3.

Задача 2. а) На прямой задано множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M . Докажите, что множество M содержит бесконечно много точек.

б) На плоскости задано некоторое множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего какую-либо пару точек того же множества M . Докажите, что множество M бесконечно.

Задача 3. В вершинах 100-угольника расставлены числа так, что каждое есть среднее арифметическое своих соседей. Докажите, что все они равны.

Задача 4. На полях бесконечной шахматной доски записаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних чисел – верхнего, нижнего, правого и левого. Докажите, что все эти числа равны между собой.

Задача 5. На доске написано несколько положительных чисел, каждое из которых равно полусумме остальных. Сколько чисел написано на доске?

Задача 6. Докажите, что не существует четверки натуральных чисел x , y , z , u , удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 = 3 \cdot (z^2 + u^2)$.

РАЗНОЕ

Задача 7. На уроке учитель написал на доске равенство:

$35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$. Он заметил, что все числа в левой части делятся на 5, а в правой – на 6. Тогда он вынес в левой части 5 за скобки, а в правой – 6 и получил $5 \cdot (7+2-9) = 6 \cdot (7+2-9)$. Ученик сократил обе части равенства на общий множитель (заклученный в скобки) и получил $5 = 6$. Где ошибся ученик?

Задача 8. Сколькими способами 5 девушек могут встать в хоровод?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 9. 300 солдат построены в 30 шеренг и 10 рядов. Из каждой шеренги выбрали самого высокого, а из этих тридцати – самого низкого. Им оказался рядовой Иванов. Потом из каждого ряда выбрали самого низкого, а из этих десяти самого высокого. Им оказался рядовой Петров. Кто выше, Петров или Иванов ?

Задача 10. Математик шел домой вверх по течению ручья со скоростью, в полтора раза большей, чем скорость течения, и держал в руках шляпу и палку. На ходу он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой. Вскоре, заметив ошибку, он бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью, вдвое большей той, с какой шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно достал ее из воды, повернулся и как ни в чем ни бывало пошел домой с прежней скоростью. Через 40 секунд после того, как он догнал шляпу, он встретил палку, плывущую ему навстречу. Насколько раньше пришел бы он домой, если бы все время шел вперед ?

ТЕМА: НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

В некоторых задачах этой темы применяется геометрическая теорема: сумма длин двух сторон треугольника всегда больше длины третьей стороны. Она называется "неравенством треугольника". Каждый из вас применял на практике неравенство треугольника, когда пытался идти напрямик: пошел по газону – применил неравенство треугольника.

Задача 1. Дома Пятачка, Иа и Винни-Пуха расположены в вершинах треугольника и соединены друг с другом прямыми дорогами. Делая утреннюю зарядку, Пятачок пробежал от своего дома к дому Иа, затем – к дому Винни-Пуха, после чего вернулся домой. В это время Винни-Пух в задумчивости прошел от своего дома к дому Иа и вернулся обратно. Чей путь был длиннее?

Задача 2. Домики Трех Поросят и дом Волка расположены последовательно на окружности. Где нужно построить колодец, чтобы сумма расстояний от него до всех четырех домов была минимальной?

Задача 3. Два поселка A и B расположены а) по разные стороны б) по одну сторону от дороги, которая представляет собой прямую линию. Где нужно устроить на дороге автобусную остановку, чтобы сумма расстояний от нее до поселков A и B была самой маленькой?

РАЗНОЕ

Задача 4. По углам квадратного бассейна стоят четыре столба. Потребовалось расширить этот бассейн так, чтобы площадь его стала в два раза больше, а форма осталась квадратной. Можно ли это сделать, не убирая столбов (столбы должны стоять на границе бассейна)?

Задача 5. Докажите, что если к произвольному числу приписать число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то полученное число разделится на 11.

Задача 6. На доске написали в строку 25 чисел "-1". Каждым ходом какие-то два соседних числа заменяли на "1", если они имеют один и тот же знак, и на "-1", если они имеют разные знаки. После нескольких таких ходов на доске осталось одно число. Могло ли оно быть 1?

Задача 7. Найдите наименьшее натуральное число, которое по крайней мере в 600 раз больше каждого своего простого делителя.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 8. За круглым столом сидит 1995 представителей четырех племен: люди, гномы, эльфы и гоблины. Известно, что люди никогда не сидят рядом с гоблинами, а эльфы – рядом с гномами. Докажите, что какие-то два представителя одного и того же племени сидят рядом.

Задача 9. Докажите, что из любых 100 чисел можно выбрать несколько (быть может одно), сумма которых делится на 100.

ТЕМА: РАЗНОЕ

Задача 1. На столе стоят 7 стаканов - все стоят вниз дном. Разрешается переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли вверх дном?

Задача 2. Производится следующий счет на пальцах руки: большой палец - это 1, указательный - 2, средний - 3, безымянный - 4, мизинец - 5; далее в обратном направлении: безымянный - 6, средний - 7, указательный - 8, большой - 9; далее снова в первоначальном направлении: 10, 11 и т.д. На какой палец придется число 1995?

Задача 3. По дереву ползет гусеница. За день она поднимается на 6 м, а ночью спускается на 4 м. За сколько дней она доползет до вершины, если высота дерева 14 м?

Задача 4. Можно ли в таблице 10×10 расставить 100 целых чисел так, чтобы сумма чисел в любом столбце была положительной, а в любой строке - отрицательной?

Задача 5. Верно ли равенство $3^{100} + 7^{100} = 8^{100}$?

Задача 6. На плоскости нарисовали 10 точек так, что никакие три из них не попали на одну прямую. Затем каждую точку соединили отрезком с какой-нибудь одной другой точкой (разные точки соединяли с разными). Если среди получившихся пяти отрезков есть пересекающиеся, то выбирают два таких отрезка, скажем, AB и CD , стирают их и проводят отрезки AC и BD . Докажите, что через некоторое время пересекающихся отрезков не останется.

Задача 7. В ряд стоят 30 сапог: 15 левых и 15 правых (св. перемежку). Докажите, что среди некоторых десяти подряд идущих сапог левых и правых поровну.

Задача 1. Требуется поджарить 3 ломтика хлеба. На сковородке умещаются лишь 2 ломтика. На поджаривание ломтика с одной стороны требуется 1 минута. За какое кратчайшее время можно поджарить с двух сторон все три ломтика ? (Время на переворачивание и перекладывание ломтиков можно в расчет не принимать).

Задача 2. Дан угол в 36° . Как с помощью циркуля и линейки построить угол в 99° ?

Задача 3. 15 журналов (не обязательно одинаковых) лежат на столе, полностью покрывая его. Докажите, что можно убрать восемь из них так, что оставшиеся журналы будут покрывать не менее $7/15$ площади стола.

Задача 4. Из Ливерпульской гавани каждый день в полдень в Бразилию в город Рио-де-Жанейро отправляется судно, и в то же время из Рио-де-Жанейро отходит идущее в Ливерпульскую гавань судно той же компании. Каждый из этих пароходов находится в пути ровно 7 суток, и идут они по одному и тому же пути. Сколько пароходов своей компании встретит на своем пути судно, идущее из Ливерпульской гавани в Рио-де-Жанейро?

Задача 5. Передние покрышки автомобиля стираются через 25000 км пути, а задние через 15000 км пути. Когда нужно поменять покрышки местами, чтобы они стерлись одновременно ?

Задача 6. Полуостров представляет собой острый угол, внутри которого находится дом лесника. Как леснику, выйдя из дома, добраться до одного берега полуострова, затем до другого и вернуться домой, пройдя по самому короткому пути ?

Задача 7. Даны десять натуральных чисел, не превышающих 91. Докажите, что отношение некоторых двух из этих чисел принадлежит отрезку $[2/3; 3/2]$.