Совершенные графы

Летний лагерь 57 школы. Август 2013

Занятие 1

1. Пусть G_n – простой граф со множеством вершин $V=\{v_1, \ldots, v_n\}$, и пара вершин (v_i, v_j) соединена ребром тогда и только тогда, когда i и j взаимно просты. Изобразите графы G_6 и G_8; вычислите их кликовые числа и числа независимости.

2. Придумайте граф, для которого выполнено неравенство $|V(G)| > \alpha(G) + \omega(G)$. Существует ли граф, в котором $|V(G)| < \alpha(G) + \omega(G) - 1$?

8. Между некоторыми из 200 городов установлено воздушное сообщение, причём каждый город связан (беспосадочными рейсами) не менее чем со 100 другими. Докажите, что если отменить любые 99 рейсов, то всё равно из любого города можно добраться в любой другой на самолётах (с пересадками). Укажите все случаи, когда связность нарушается при отмене 100 рейсов.

9. В графе G 12 вершин, и каждый его 9-вершинный подграф содержит индуцированный подграф K_5. Докажите, что сам G содержит индуцированный подграф K_6. (Указание: рассмотрите нечётные циклы в дополнении к G.)

Совершенные графы

Летний лагерь 57 школы. Август 2013

Занятие 1

1. Пусть G_n – простой граф со множеством вершин $V=\{v_1, \ldots, v_n\}$, и пара вершин (v_i, v_j) соединена ребром тогда и только тогда, когда i и j взаимно просты. Изобразите графы G_6 и G_8; вычислите их кликовые числа и числа независимости.

2. Придумайте граф, для которого выполнено неравенство $|V(G)| > \alpha(G) + \omega(G)$. Существует ли граф, в котором $|V(G)| < \alpha(G) + \omega(G) - 1$?

8. Между некоторыми из 200 городов установлено воздушное сообщение, причём каждый город связан (беспосадочными рейсами) не менее чем со 100 другими. Докажите, что если отменить любые 99 рейсов, то всё равно из любого города можно добраться в любой другой на самолётах (с пересадками). Укажите все случаи, когда связность нарушается при отмене 100 рейсов.

9. В графе G 12 вершин, и каждый его 9-вершинный подграф содержит индуцированный подграф K_5. Докажите, что сам G содержит индуцированный подграф K_6. (Указание: рассмотрите нечётные циклы в дополнении к G.)

Совершенные графы

Летний лагерь 57 школы. Август 2013

Занятие 2

1. Пусть граф F получен из графа G заменой вершины v на граф H, причём графы G и H – совершенные. Пусть B – множество вершин того из цветов правильной раскраски графа G, в который покрашена вершина v, и выберем C – такое независимое подмножество вершин H, что $\omega(H \setminus C) < \omega(C)$.

Докажите, что множество A = (B U C) / {v} пересекается с каждой максимальной кликой графа F.

2. Докажите основную лемму о линейной зависимости: любые (n + 1) векторов в пространстве Rn линейно зависимы, то есть существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

3. Докажите, что в каждом совершенном графе есть клика, пересекающая каждое наибольшее независимое множество вершин этого графа.

Совершенные графы

Летний лагерь 57 школы. Август 2013

Занятие 2

1. Пусть граф F получен из графа G заменой вершины v на граф H, причём графы G и H – совершенные. Пусть B – множество вершин того из цветов правильной раскраски графа G, в который покрашена вершина v, и выберем C – такое независимое подмножество вершин H, что $\omega(H \setminus C) < \omega(C)$.

Докажите, что множество A = (B U C) / {v} пересекается с каждой максимальной кликой графа F.

2. Докажите основную лемму о линейной зависимости: любые (n + 1) векторов в пространстве Rn линейно зависимы, то есть существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

3. Докажите, что в каждом совершенном графе есть клика, пересекающая каждое наибольшее независимое множество вершин этого графа.