Summer Camp of 57 School

Victor Alekseevich Kleptsyn

6th of August 2013

Universality and random walks

Problem 1. Доопределите $\ln x$ для $0 < x < 1$ и проверьте, что соотношение

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

продолжает выполняться.

Problem 2. Определим e соотношением $\ln e = 1$. Докажите, что $2 < e < 4$.

Problem 3. Предполагая, что $\log_e$ существует и обладает естественными свойствами (подумайте, какими из них вы будете пользоваться!), докажите, что $\ln x = \log_e x$.

Problem 4. Найдите (не доказывая), чему будет примерно равно выражение $(1 + \frac{x}{n})^n$ при больших n.

Hint. Прологарифмируйте!

Problem 5. Оцените (с разумной погрешностью) отношение C_{50}^{10}/C_{50}^{25}.

Problem 6. Докажите оценку $\frac{2^n}{n} < C_n^{[n/2]} < 2^n$.

Problem 7. С какой вероятностью случайно прыгающий по прямой кролик окажется в начале своего пути через а) 5 б) 6 в) 8 г) $n = 2m$ шагов?

Problem 8. Покажите, что для некоторых $c_2 > c_1 > 0$ при всех достаточно больших n выполнено $\frac{c_1}{\sqrt{n}} \cdot 2^n < C_n^{[n/2]} < \frac{c_2}{\sqrt{n}} \cdot 2^n$.

Problem 9. Случайно прыгающий кролик совершает $n = k^2$ шагов по решётке на прямой с шагом $1/k$. Если k большое, с какой вероятностью он окажется на отрезке от x до $x + \Delta x$? Покажите, что для некоторой константы c величина $C_n^{[n/2]}$ ведёт себя при больших n как $\frac{c}{\sqrt{n}} \cdot 2^n$ (т.е., их отношение становится с ростом n всё ближе к 1).

Problem 10. Случайно прыгающий кролик совершает $n = k^2$ шагов по решётке на плоскости с шагом $1/k$. Если k большое, с какой вероятностью он окажется в прямоугольнике $[x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y]$?

Hint. Либо поверните решётку на 45 градусов, либо заметьте, что примерно половина прыжков совершается по горизонтали, а другая по вертикали.

Problem 11. Найдите константу c из задачи 9.

Hint. Сумма вероятностей по всевозможным точкам приземления равна 1.